2025年2月6日　実施

聖マリアンナ医科大学

医学部 前期　**数 学**

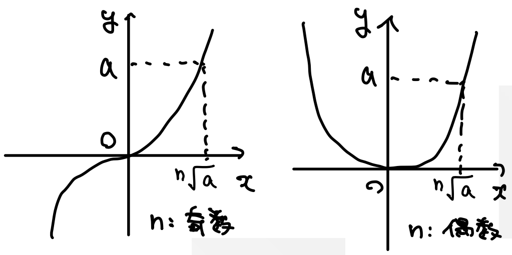
（制限時間　90分）

解答・解説

[1]

(1)　・n が奇数のとき：$x^n=a$ の唯一の実数解を $\sqrt[n]{a}$ とする。

・n が偶数のとき：$x^n=a$ の実数解（これは2つある）のうち正のものを $\sqrt[n]{a}$ とする。



$a>0$ のとき，$\sqrt[n]{a}$ は $x^n=a$ の唯一の正の実数解である。

(2)　$\sqrt[n]{a}>0$ より $(\sqrt[n]{a})^m>0$ であり，

$$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n=(\sqrt[n]{a})^{mn}$$
$$=\{(\sqrt[n]{a})^n\}^m=a^m$$

となるから，$(\sqrt[n]{a})^m$ は $x^n=a^m$ の正の実数解である。よってこれは $\sqrt[n]{a^m}$ に等しいから，$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ である。

[2]

(1)　3個の a，4個の b，3個の c の順列を考えて $\dfrac{10!}{3!4!3!}=$ 4200個 ある。

(2)　左端は a より，残り9文字の順列を考えて $\dfrac{9!}{2!4!3!}=$ 1260個 ある

(3)　左端は a，右端は b より，残り8文字の順列を考えて，$\dfrac{8!}{2!3!3!}=$ 560個 ある。

(4)　両端以外の8文字は2個の a，3個の b，3個の c でできている。

d を行って a a b b b a b になるとき，a，b がそれぞれ隣り合わないことから

(a) a b b b a (b)
　　↑ ↑ ↑

の↑に c を入れるしかないから 1個 ある。また，d を行って a b a b b a b になるときは

(a) b a b b a (b)
　∧ ∧ ∧ ↑ ∧ ∧

↑に c を入れて，あとは5カ所の∧のうち2カ所に c を入れるから，

$_5C_2=$ 10個 ある。

(5) dを行った結果，a同士，b同士が何カ所隣り合っているかを考える．

cは3個しかないから，(i)〜(iv)を満たすとき，dを行って4個以上隣り合っていることはない．

・3カ所隣り合っているとき：

(a) aabab(b)，(a) abaab(b)

(a) baaab(b)，(a) aabba(b)

(a) abbaa(b)，(a) bbaaa(b)

の6通りあり．それぞれにcの入れ方が1通りあるから，6·1＝6個ある．

・1カ所隣り合っているとき：

(a) ababab(b)　(a) baaba(b)

(a) babaa(b)

の3通りあり，それぞれにcの入れ方が6通りあるから，3·10＝30個ある．

よって(i)〜(iv)をすべて満たすのは

$6+30=$ 36個ある．

$\boxed{3}$　$f(x)=4\sin x+|2\cos 2x+1|$

(1) $\sin x=t$

$f(x)=4t+|2(1-2t^2)+1|$

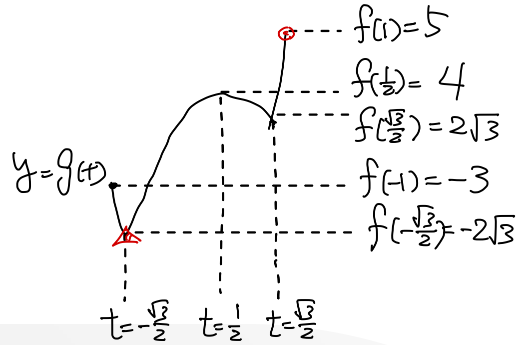
$=4t+|4t^2-3|$

$4t^2-3\leqq 0$のとき $f(x)=-4t^2+4t+3$

このとき $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $f(x)=\begin{cases}-4t^2+4t+3 & \left(|t|\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ 4t^2+4t-3 & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq t\leqq 1\right)\end{cases}$

$g(t)=\begin{cases}-4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+4 & \left(|t|\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ 4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-4 & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq|t|\leqq 1\right)\end{cases}$



$\max: f(1)=5$，$\min: f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\sqrt{3}$

(3) $t=\pm 1$のとき，tの値1つに対してxの値が1つ，$-1<t<0$，$0<t<1$のときxの値が2つ

$t=0$のとき，$x=0, \pi, 2\pi$の3つが対応する．

$y=g(t)$のグラフと直線$y=3$の共有点の個数は1つ$(t=0)$

したがって$\sin x=t\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$と対応するとxの個数は3つ

(4) $-1<t<1$において$y=g(t)$のグラフと直線$y=k$の共有点が3つである条件だから，$2\sqrt{3}<k<4$

4

(1) $\frac{2}{1-\sin\theta} = \frac{2}{1+\cos\theta}$ —①

$2(1+\cos\theta)=2(1-\sin\theta)$

∴ $\tan\theta=-1$. $\theta=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$

(これらは①を満たす)

$\theta=\frac{3}{4}\pi$のとき $r=\frac{2}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=4+2\sqrt{2}$.

$\theta=\frac{7}{4}\pi$のとき $r=\frac{2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=4-2\sqrt{2}$.

∴ $(r,\theta)=(4+2\sqrt{2},\frac{3}{4}\pi),(4-2\sqrt{2},\frac{7}{4}\pi)$

(2) $C_1 : r=\frac{2}{1-\sin\theta}$

$r-r\sin\theta=2$

$r=2+r\sin\theta$

両辺を2乗して $r^2=x^2+y^2$, $r\sin\theta=y$ を用いて.

$x^2+y^2=(2+y)^2$

∴ $y=\frac{1}{4}x^2-1$

(3) $C_2 : r=\frac{2}{1+\cos\theta}$

$r+r\cos\theta=2$

$r=2-r\cos\theta$

両辺を2乗して. $r^2=x^2+y^2$, $r\cos\theta=x$ を用いて

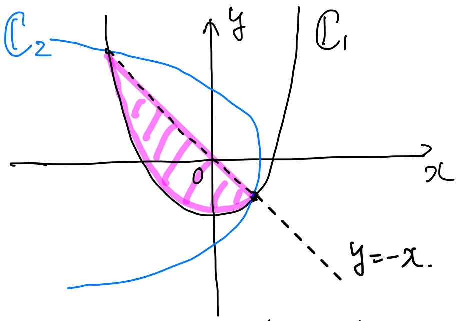
$x^2+y^2=(2-x)^2$.

∴ $x=-\frac{1}{4}y^2+1$

また $y^2=4-4x$.

∴ $y=2\sqrt{1-x}$ or $y=-2\sqrt{1-x}$

(4)



(1)より C_1とC_2の共有点が2点のみであることに注意すると, C_1, C_2のグラフは図のようになるので, C_1と直線$y=-x$とで囲む部分の面積に注目して

$\alpha=(4+2\sqrt{2})\cos\frac{3}{4}\pi=-2-2\sqrt{2}$.

$\beta=(4-2\sqrt{2})\cos\frac{7}{4}\pi=-2+2\sqrt{2}$

として

$$\frac{S}{2}=\int_\alpha^\beta\left\{-x-\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int_\alpha^\beta(x^2+4x-4)dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{24}\cdot(4\sqrt{2})^3=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

∴ $S=\frac{32}{3}\sqrt{2}$