

2025年3月8日 実施

久留米大学

後期 数学

(制限時間 90分)

解答  
速報

医学部専門予備校



## 解答・解説

[1]

(1)  $x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 1 = 0$  の  
判別式を  $D_1$  とする。

$$D_1/4 = a^2 - (2a^2 - 6a + 1) \\ = -a^2 + 6a - 1$$

 $D_1 \geq 0$  より

$$a^2 - 6a + 1 \leq 0$$

$$\underline{3 - 2\sqrt{2} \leq a \leq 3 + 2\sqrt{2}}$$

(2)  $x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 1 = 0$   
 $2a^2 - 2(c+3)a + c^2 + 1 = 0$  とし  
 $a$  の 2 次方程式 とみて、判別式を  $D_2$  と  
する。

$$D_2/4 = (c+3)^2 - 2(c^2 + 1) \\ = -c^2 + 6c + 7 \\ = -(c-7)(c+1)$$

 $D_2/4 \geq 0$  より

$$(c-7)(c+1) \leq 0$$

$$\underline{-1 \leq c \leq 7}$$

(3) 共通解を  $c$  とすると

$$\begin{cases} c^2 - 2ac + 2a^2 - 6a + 1 = 0 \\ c^2 - 2bc + 2b^2 - 6b + 1 = 0 \end{cases}$$

また、このとき

 $a, b$  は  $x$  の 2 次方程式

$$2x^2 - 2(c+3)x + c^2 + 1 = 0$$

の 2 解とみることを 2 つする。

 $a, b$  は異なる実数なので

$$2x^2 - 2(c+3)x + c^2 + 1 = 0 \cdots \textcircled{4}$$

$$D_3/4 = -(c-7)(c+1)$$

 $D_3 > 0$  より

$$(c-7)(c+1) < 0 \text{ から } -1 < c < 7 \cdots \textcircled{1}$$

 $-1 < c < 7$  のもとで $\textcircled{4}$  における 2 解と係数の関係から

$$a+b = c+3$$

$$ab = \frac{c^2 + 1}{2}$$

 $a, b > 0$  より  $a, b$  は 同符号で

$$a+b = c+3 \text{ から } \textcircled{1} \text{ より}$$

 $a, b$  が正なので

$$d = |a| + |b| + |c| \\ = a + b + |c| \\ = c + 3 + |c| \text{ と表せ.}$$

(i)  $-1 < c \leq 0$  のとき

$$d = 3$$

(ii)  $0 < c < 7$  のとき

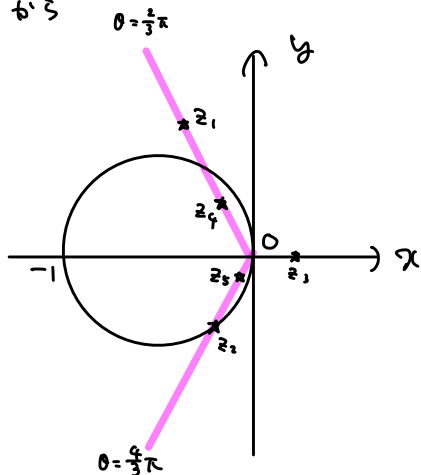
$$d = 2c + 3 \text{ より } 3 \leq d < 17$$

したがって

$$\underline{3 \leq d < 17}$$



かつ  $z^n \neq 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$  のいずれかであり  
 $|z^n - 0| < |-1 - 0|$  より 2点  $0, -1$  を結ぶ弧上の  
 を直径とする円周上に  $z^n$  があるときに限られる  
 から



上(7)より  $n=2$

[4]

- (1) 3の倍数は  
 $2025 \div 3 = 675$ より 675個  
 5の倍数は  
 $2025 \div 5 = 405$ より 405個  
 15の倍数は  
 $2025 \div 15 = 135$ より 135個  
 およ 集合Aの要素の個数を  $n(A)$  と表すとして  
 $X$ : 3の倍数,  $Y$ : 5の倍数 とする。  
 このとき

$$\begin{aligned} E(2025) &= n(X \cup Y) - n(X \cap Y) \\ &= n(X) + n(Y) - 2 \times n(X \cap Y) \\ &= 675 + 405 - 270 = \underline{810} \end{aligned}$$

- (2) 2の倍数は  
 $n \div 2 = \underline{2^{a-1} p^b}$  個  
 $p$ の倍数は  
 $n \div p = \underline{2^a p^{b-1}}$  個  
 $2p$ の倍数は  
 $n \div 2p = \underline{2^{a-1} p^{b-1}}$  個

したがって  
 $Z$ : 2の倍数,  $W$ :  $p$ の倍数 とし

$$\begin{aligned} E(n) &= n(Z \cup W) - n(Z \cap W) \\ &= n(Z) + n(W) - 2 \times n(Z \cap W) \\ &= 2^{a-1} p^b + 2^a p^{b-1} - 2^a p^{b-1} \\ &= 2^{a-1} p^b \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \frac{E(n)}{n} = \frac{2^{a-1} p^b}{2^a p^b} = \underline{\frac{1}{2}}$$

(3) (2)と同様に考えよ

$$\frac{E(n)}{n} = \frac{2^{c-1}r^d + 2^c r^{d-1} - 22^{c-1}r^{d-1}}{2^c r^d}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{r} - \frac{2}{2r}$$

$$= -2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2}$$

$$f(2, r) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \text{ とおくと}$$

$$f(2, r) \text{ が小さいほど } \frac{E(n)}{n} \text{ は大きくなる}$$

具体的に  $2, r$  ( $2 < r$ ) に奇数の素数を代入して

$$f(3, 5) < f(3, 7) < f(3, 11) < f(3, 13) < \dots$$

と仮定する。

 $\frac{E(n)}{n}$  のとりうる値のうち、4番目に小さい値は

$$-\frac{1}{2} f(3, 13) + \frac{1}{2} = -\frac{11}{78} + \frac{1}{2} = \frac{19}{39}$$

[5]

$$(1) f'(x) = 3x^2 - 2 \quad (*)$$

点  $P(p, p^3 - 2p)$  における接線の  
方程式は

$$y - (p^3 - 2p) = (3p^2 - 2)(x - p)$$

$$y = (3p^2 - 2)x - 2p^3 \quad \text{① あり}$$

① と  $y = f(x)$  と連立して

$$x^3 - 2x = (3p^2 - 2)x - 2p^3$$

$$(x - p)^2(x + 2p) = 0$$

より点  $Q$  の  $x$  座標は  $-2p$ よって  $p = 0$  のときも成り立つ。  $\underline{g = -2p}$ 

$$(2) g = -2p \text{ あり}$$

$$\begin{cases} x = (1 - 3t)p & \dots \text{②} \\ y = (1 - 9t)p^3 - 2(1 - 3t)p & \dots \text{③} \end{cases}$$

よって ② より

$$t = \frac{1}{3} \text{ のとき直線 } x = \frac{1}{3} \text{ を描く。}$$

また、③ より

$$t = \frac{1}{3} \text{ のとき } \begin{cases} x = \frac{2}{3}p \\ y = -\frac{2}{3}p \end{cases} \text{ より直線 } y = -2x \text{ を描く。}$$

また  $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$  のとき

$$\text{② より } p = \frac{1}{1 - 3t} \text{ を ③ に代入して}$$

$$y = \frac{1 - 9t}{(1 - 3t)^3} x^3 - 2x$$

$$(2) g(x) = \frac{1 - 9x}{(1 - 3x)^3} = (1 - 9x)(1 - 3x)^{-3}$$

$$g'(x) = -9(1 - 3x)^{-3} + 9(1 - 9x)(1 - 3x)^{-4}$$

$$= \frac{-9(1 - 3x) + 9(1 - 9x)}{(1 - 3x)^4}$$

$$= \frac{-54x}{(1 - 3x)^4}$$

$$(3) a = \frac{1 - 9x}{(1 - 3x)^3} \text{ より } y = a \text{ と } y = g(x) \text{ が}$$

異なる3つの異なる点をもち条件を考える。

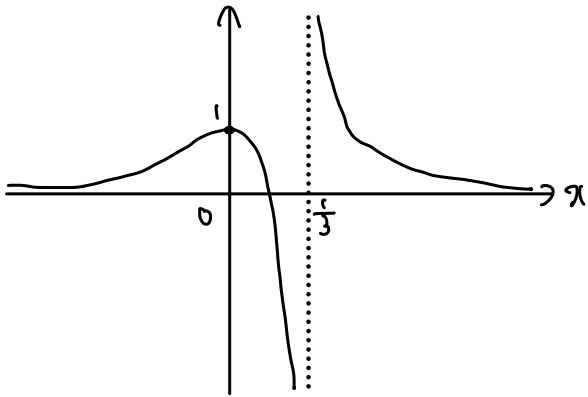
 $y = g(x)$  の増減表は次の通り

| $x$     | $\dots$ | $0$ | $\dots$ | $(\frac{1}{3})$ | $\dots$ |
|---------|---------|-----|---------|-----------------|---------|
| $g'(x)$ | +       | 0   | -       | 0               | -       |
| $g(x)$  | ↗       | 1   | ↘       | ↘               | ↘       |

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}-0} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}+0} g(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \text{ あり}$$

$y = f(x)$  のグラフは以下のようなになる



よって求める  $a$  の範囲は  $0 < a < 1$