2025年度　私大医学部入試

解答速報

2025年2月1日　実施

久留米大学

医学部　一般前期　数 学

（制限時間　90分）

医学部専門予備校 D組

解答・解説

1

(1) $a^x = b^y = \sqrt{ab} = k\ (>0)$ とおくと

$a = k^{\frac{1}{x}}$, $b = k^{\frac{1}{y}}$, $ab = k^2$ より

$k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} = k^2$

$k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = k^2$

よって $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 2$ …①

また

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(4x+y) = 5+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}$

相加平均・相乗平均の大小関係から

$5+\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right) \geqq 5+2\sqrt{\frac{y}{x}\times\frac{4x}{y}} = 9$

等号成立は $\frac{y}{x} = \frac{4x}{y}$ より $y=2x$ のとき.

よって ①より

$\frac{1}{x}+\frac{1}{2x} = 2$ から $(x, y)=\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$ のとき $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(4x+y)$ は最小値9をとるので

$4x+y$ の最小値は $\frac{9}{2}$

(2) $a^x b^y = b^y c^z = c^z a^x$ より

$a^x = b^y = c^z$

よって $a^x = b^y = c^z = l\ (>0)$ とおくと

$a = l^{\frac{1}{x}}$, $b = l^{\frac{1}{y}}$, $c = l^{\frac{1}{z}}$ より

$a^x b^y = b^y c^z = c^z a^x = abc$ と合わせて

$l^2 = l^{\frac{1}{x}} \times l^{\frac{1}{y}} \times l^{\frac{1}{z}}$

$l^2 = l^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

よって $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 2$ …② より

(1)と同様に考えて

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+4y+z)$

$= 6+\left(\frac{4y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{4y}{z}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)$

$\geqq 6+4+4+2 = 16$

等号成立は $\frac{4y}{x} = \frac{x}{y}$ かつ $\frac{z}{y} = \frac{4y}{z}$ かつ $\frac{x}{z} = \frac{z}{x}$

より $x = 2y = z$ のとき.

② から $(x, y, z) = (2, 1, 2)$ のとき $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+4y+z)$ は

最小値16をとるので

$x+4y+z$ の最小値は 8

2

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$,

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\vec{c}$ である

(1) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$

$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\vec{c}-\vec{a}$

$\overrightarrow{OD}=x\vec{a}+\frac{1}{2}y\vec{b}+\frac{1}{3}z\vec{c}$ より

$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ のとき

$\left(x\vec{a}+\frac{1}{2}y\vec{b}+\frac{1}{3}z\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)=0$

より整理すると、

$-\frac{3}{4}x-\frac{z}{12}=0$

よって $\frac{z}{x}=-9$ …①

さらに

$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$ であるとき

$\left(x\vec{a}+\frac{1}{2}y\vec{b}+\frac{1}{3}z\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{c}-\vec{a}\right)=0$

①より

$\left(x\vec{a}+\frac{1}{2}y\vec{b}-3x\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{c}-\vec{a}\right)=0$

を整理すると、

$-\frac{x}{3}-\frac{y}{6}=0$

よって $\frac{y}{x}=-2$

(2) Hは平面APQ上にあるから

$\overrightarrow{OH}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OP}+z\overrightarrow{OQ}$

$=x\vec{a}+\frac{1}{2}y\vec{b}+\frac{1}{3}z\vec{c}$

$x+y+z=1$ と表せ.

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AQ}$ より

(1)と同様の計算となる。

よって $\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=-9z \\ y=-2x \end{cases}$

したがって $(x, y, z)=\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{9}{10}\right)$

$\overrightarrow{OH}=-\frac{1}{10}\vec{a}+\frac{1}{10}\vec{b}+\frac{3}{10}\vec{c}$

さらに

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OC}+k\overrightarrow{CH}$

$=(1-k)\vec{c}+k\overrightarrow{OH}$

$=-\frac{1}{10}k\vec{a}+\frac{1}{10}k\vec{b}+\left(1-\frac{7}{10}k\right)\vec{c}$

と表せ. Rは平面OAB上より $\vec{c}$ の係数は0

より $k=\frac{10}{7}$ となるので

$\overrightarrow{OR}=-\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}$

$=\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}$

3

(1) $f(x)=4x^3+9x^2+6x+3$

$f'(x)=12x^2+18x+6$
$=6(2x+1)(x+1)$

より $f'(x)$ は $x=-\frac{1}{2},-1$ の前後で符号変化するので $x=-\frac{1}{2},-1$ で極値をとる

ここで

$f(x)=\frac{1}{6}f'(x)\left(2x+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ であり

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=f'(-1)=0$ であることから

極値を与える点を通る直線は $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

(2点を通る直線は一意に定まる)

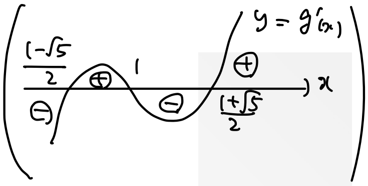
(2)(i) $g(x)=3x^4-8x^3+12x$

$g'(x)=12x^3-24x^2+12$ より

$g(x)=g'(x)\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}\right)-4x^2+9x+2$

(ii) $g'(x)=12(x^3-2x^2+1)$
$=12(x-1)(x^2-x-1)$

より $g'(x)$ は $x=1,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ の前後で符号変化する。



上図より $x=1$ において極大値 7 をとり

$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ において極小値 $\frac{1\pm5\sqrt{5}}{2}$ をとる

($g(x)=g'(x)\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}\right)-4(x^2-x-1)+5x-2$ を用いると楽)

(iii) $g'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=g'(1)=g'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=0$ であることから

3つの極値を与える点を通る放物線は

(i)より $y=-4x^2+9x+2$

(3点を通る放物線は一意に定まる)

4

(1) Ⅰに入るのは 4

Ⅱに入るのは 3 もしくは 8

Ⅲに入るのは 6 もしくは 7 もしくは 16

よって 3個

(2) Ⅰ: n回で終了することを考えており

2回操作をしているので、あと $n-2$回

Ⅱ, Ⅲ: a_n個の整数のうち、最初の操作が C で割る場合、あと $n-1$回で終了するから a_{n-1}個

最初の操作が C で割らない場合、

加える数は $1\sim C-1$ の $C-1$ 通りで

加えた後は C の倍数だから C で割る

つまり、あと $n-2$回で終了するから

a_{n-2}個.

よって $n\geqq3$ として

$a_n=a_{n-1}+(C-1)a_{n-2}$ …(*)

(3) $x^2-x-(C-1)=0$ の解は

$x=\frac{1\pm\sqrt{4C-3}}{2}$ より

これが整数となるとき、$\sqrt{4C-3}$ が奇数

つまり $4C-3=(2k+1)^2$ のときである.

このとき $C=k^2+k+1$ となる

$k=2$ のとき $C=7$ となる.

(*)から

$a_{n+2}=a_{k+1}+6a_k\ (n\geqq1)$ とし

$$\begin{cases} a_{n+2}+2a_{n+1}=3(a_{n+1}+2a_n) \\ a_{n+2}-3a_{n+1}=-2(a_{n+1}-3a_n) \end{cases}$$

と変形できるので

$a_1=1,\ a_2=6$ から

$a_{n+1}+2a_n=8\times3^{n-1}$ …①

$a_{n+1}-3a_n=3\times(-2)^{n-1}$ …②

(①−②)÷5 から

$a_n=\frac{1}{5}\left\{8\times3^{n-1}-3\times(-2)^{n-1}\right\}$

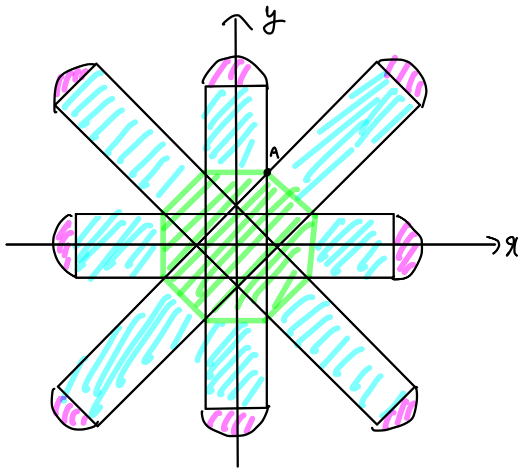
$\boxed{5}$

(1) 平面$z=t$における球Dの断面は半径$\sqrt{1-t^2}$の円となる。以下，$\sqrt{1-t^2}=\alpha$とする

よって立体Wの平面$z=t$における断面は，

$z=t$上において半径αの円の中心が，

与えられた4つの線分を動いたときの円の通過領域（下図の色付き部分）



上図の点Aの座標は$(\alpha, (1+\sqrt{2})\alpha)$となるので，

ピンク部分は $\alpha^2\pi\times4=4(1-t^2)\pi$

青部分は $\{5-(1+\sqrt{2})\alpha\}\times2\alpha\times4$

$+\{5\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})\alpha\}\times2\alpha\times4$

$=40(1+\sqrt{2})\alpha-16(1+\sqrt{2})\alpha^2$

$=40(1+\sqrt{2})\sqrt{1-t^2}-16(1+\sqrt{2})(1-t^2)$

みどり部分は$\{2\alpha\times(1+\sqrt{2})\alpha\times\frac{1}{2}\}\times8=8(1+\sqrt{2})\alpha^2$

$=8(1+\sqrt{2})(1-t^2)$

よって $S(t)=40(1+\sqrt{2})\sqrt{1-t^2}+\{4\pi-8(1+\sqrt{2})\}(1-t^2)$

$=4\{10(1+\sqrt{2})\sqrt{1-t^2}-(2+2\sqrt{2}-\pi)(1-t^2)\}$

(2) $V=\int_{-1}^{1}S(t)\,dt$

$=2\int_0^1 S(t)\,dt$

$=8\left\{10(1+\sqrt{2})\times\frac{\pi}{4}-(2+2\sqrt{2}-\pi)\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1\right\}$

$=\left(\frac{76}{3}+20\sqrt{2}\right)\pi-\frac{32}{3}(1+\sqrt{2})$