$\boxed{1}$

(1) $T_1 = a_1$ だから

$a_1 = 3 - a_1 + 3$　　$\therefore\ a_1 = 3$ ……(ア)

$T_2 = a_1 + 2a_2 = 3 + 2a_2$

$3 + 2a_2 = 4(6 - a_2 + 3)$　$\therefore\ a_2 = \dfrac{11}{2}$ ……(イ)

(2) $n \geqq 2$ のとき

$na_n = T_n - T_{n-1}$ を $T_n = 3n^3 - n \cdot na_n + 3n^2$

に代入して

$$T_n = 3n^2 - n(T_n - T_{n-1}) + 3n^2$$

$$(n+1)T_n - nT_{n-1} = 3n^2(n+1)$$

$$nT_{n-1} - (n-1)T_{n-2} = 3(n-1)^2 n$$

$$\vdots$$

$$+)\ 3T_2 - 2T_1 = 3 \cdot 2^2 \cdot 3$$

$$(n+1)T_n - 2T_1 = 3\sum_{k=2}^{n} k^2(k+1)$$

$$(n+1)T_n = 6 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1) - 6$$

$$(n+1)T_n = 3 \cdot \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + 3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

$\therefore\ T_n = \dfrac{1}{4}n(n+2)(3n+1)$ ……(ウ)

($n=1$ のときもみたす)

(4) $na_n = T_n - T_{n-1}$

$$= \frac{1}{4}\{n(n+2)(3n+1) - (n-1)(n+1)(3n-2)\}$$

$$= \frac{1}{4}(9n^2+5n-2)$$

$$\therefore a_n = \frac{9n^2+5n-2}{4n} \quad \cdots\cdots (\mathrm{I})$$

$\boxed{2}$

(1) $2310 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$ ---(ア)

図1で $2\cdot5$, $2^2\cdot3$, $3\cdot7$ が入っている部分を

左側, 中側, 右側と呼ぶことにする.

2, 3, 5, 7, 11 を左側, 中側, 右側のどこにおくかで

$3^5 = 243$ 通り ----(イ)

(2) 異なる3種類のものから重複を許して4個選ぶ

重複組み合わせの個数だから

${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$ 通り ---(ウ)

(3) $1680 = 2^4\cdot3\cdot5\cdot7$

4個の2を左側, 中側, 右側に x, y, z 個

おくとすると, (2)から15通り

このうち $(x, y, z) = (3, 0, 1), (2, 0, 2), (2, 1, 1), (1, 0, 3)$

$(1, 1, 2), (1, 2, 1)$ の6通りは不適だから

$15 - 6 = 9$ 通り

3, 5, 7 を左側, 中側, 右側のどこかにおくと考えて

3^3 通り

∴ $9 \times 3^3 = 243$ 通り ....(エ)

$\boxed{3}$

(1) $x = 2\sin\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right)$ で $0 \leqq \theta \leqq \pi$ より $\frac{5}{6}\pi \leqq \theta + \frac{5}{6}\pi \leqq \frac{11}{6}\pi$

$\therefore -2 \leqq x \leqq 1$ ……(ア)

$x^2 = 3\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$

$= 1 + (1 - \cos 2\theta) - \sqrt{3}\sin 2\theta$

$= 2 - \sqrt{3}\sin 2\theta - \cos 2\theta$

$\therefore \sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta = 2 - x^2$ ……(イ)

(2) $x^2 + 2 = a(2x - 1)$

$x^2 - 2ax + a + 2 = 0$

判別式Dとすると $x<0$ に重解を持つので

$D = 0$, $2a < 0$, $a + 2 > 0$

$\Longleftrightarrow (a-2)(a+1) = 0$, $-2 < a < 0$

$\therefore a = -1$ ……(ウ)

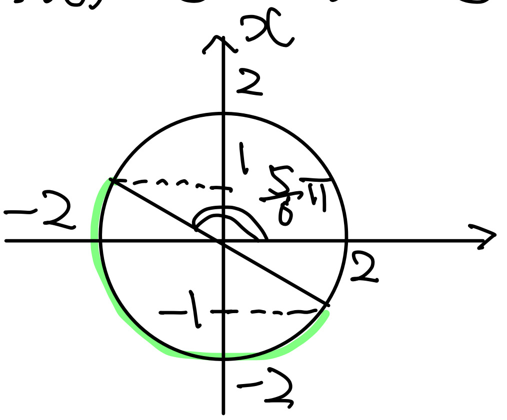
このときの重解が接点のx座標だから

$x = a = -1$ ……(エ)

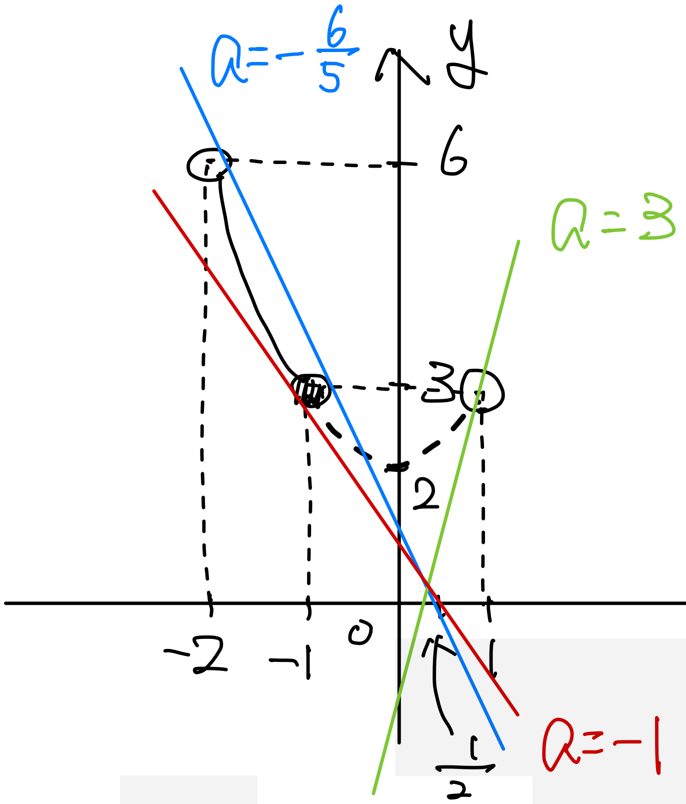
(3) $f(\theta) = x^2 - 2 - 2ax + a + 4$

$= x^2 + 2 - a(2x - 1)$

$f(\theta) = 0$ のとき $x^2 + 2 = a(2x - 1)$



$x = -2$ に対し θ は1個
$-2 < x \leqq -1$ の x 1つに対し θ は2個
$-1 < x \leqq 1$ の 〃 1個
が対応する



破線，白丸は1つ
実線，黒丸は2つ
に対応

グラフより

$N \geqq 1$ のとき $a \leqq -1,\ 3 \leqq a$ ‥‥(オ)

最大のNは $N=3$ ‥‥(カ)

このとき $-\frac{6}{5} < a < -1$ ‥‥(キ)

4

(1) 6人が誰を指名するかは

全部で 3^6 通り.

「新たな友達」が3組できるとき

A.B.CとD.E.Fのペアの作り方は

$3!=6$ 通り

よって「新たな友達」が3組できる

確率は $\frac{6}{3^6}=\frac{2}{243}$ ア

「新たな友達」が2組できるとき.

チームαのどの2人が「新たな友達」を

作れたかで ${}_3C_2=3$ 通り.

この2人がチームdの誰と友達になったか

で ${}_3P_2=6$ 通り.

「新たな友達」になれなかった2人は

お互いを指名していないから

$1-\left(\frac{1}{3}\right)^2$

よって「新たな友達」が2組できる

確率は $\frac{3\times6}{3^4}\times\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{16}{81}$ イ

(2) Bが誰かと「新たな友達」になるのは.
Aと友達になる人以外を指名し、
その指名された人がBを指名したとき
だから $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ ウ

(3)「新たな友達」を「$\longleftrightarrow$」で表すとする。
A, Dが誰かと「新たな友達」になるのは

① $A \longleftrightarrow D$ (B. C. E. Fは任意)
② $A \longleftrightarrow E$ かつ $B \longleftrightarrow D$ (C. Fは任意)
③ $A \longleftrightarrow E$ かつ $C \longleftrightarrow D$ (B. Fは任意)
④ $A \longleftrightarrow F$ かつ $B \longleftrightarrow D$ (C. Eは任意)
⑤ $A \longleftrightarrow F$ かつ $C \longleftrightarrow D$ (B. Eは任意)

のときで全てとなる
①の確率は $\frac{1}{9}$、②~④の確率は $\frac{1}{81}$ なので
A、Dが誰かと「新たな友達」となる事象をX
AとDが「新たな友達」となる事象をYとおくと

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{81} \times 4} = \frac{9}{13}$$ エ

5

(1) 解と係数の関係より

$\alpha+\beta = \underline{2p+1}$ ア …①

$\alpha\beta = \underline{2(p^2-p-1)}$ イ …② である

① より $p=\dfrac{\alpha+\beta-1}{2}$ を ② に代入して

$\alpha\beta = 2\left(\dfrac{\alpha+\beta-1}{2}\right)^2 - 2\left(\dfrac{\alpha+\beta-1}{2}\right) - 2$

整理して $(\alpha-2)^2+(\beta-2)^2=9$ …②

よって中心 $\underline{(2, 2)}$ ウ, 半径 $\underline{3}$ エ の円

(2) $-\dfrac{1}{2} \leqq p \leqq 3$ より

$-\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{\alpha+\beta-1}{2} \leqq 3$

$0 \leqq \alpha+\beta \leqq 7$ …③ である。

$\alpha<\beta$ であることに注意すると、

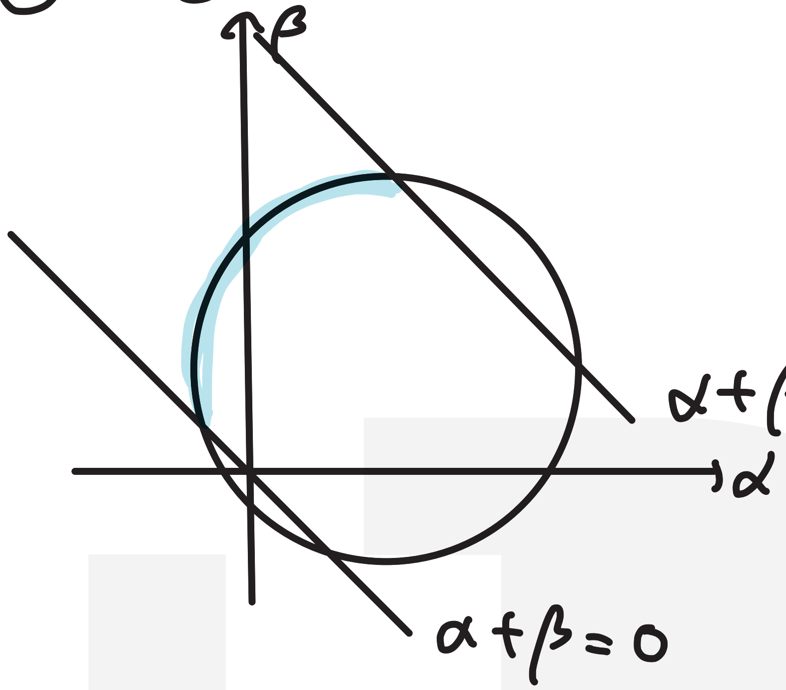
$\alpha+\beta=0$ と ② の交点が

$(\alpha, \beta)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\alpha+\beta=7$ と ② の交点が

$(\alpha, \beta)=(2, 5)$ であることから

②と③をみたすのは下図の青線部



よって上図より $-1 \leqq \alpha \leqq 2$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \beta \leqq 5$

オ　カ

(3) $2\alpha-\beta=k$ とおくと. $2\alpha-\beta$ が k という値をとることは(2)の青線部と $2\alpha-\beta=k$ が共有点をもつことと等しい。

$2\alpha-\beta-k=0$ の傾きが2であることから青線部と接するときに最小値をとり. $(\alpha,\beta)=(2,5)$ のとき最大値をとる.

最小値をとるとき.

$$\frac{|2\times2-2-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=3$$

$$|2-k|=3\sqrt{5}$$

$k=2\pm3\sqrt{5}$ となり図より $k=2-3\sqrt{5}$

最大値をとるとき.

$k=2\times2-5=-1$ だから

$2-3\sqrt{5}\leqq2\alpha-\beta\leqq-1$
…答