2025年1月26日　実施

川崎医科大学

医学部　一般　数学

解答・解説

1 (1) ℓ と m を連立して

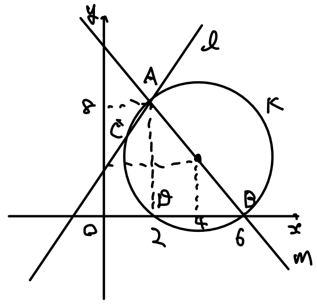
$$2x+4=-2x+12 \quad \therefore\ x=2$$

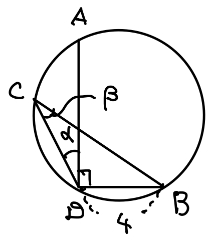
これより A の座標は $(2,8)$ である。

また，B の座標は $(6,0)$ であるから，

円 K の中心は AB の中点で $(4,4)$

半径は $\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ となる。





$K:(x-4)^2+(y-4)^2=20$ と ℓ を連立して

$$(x-4)^2+(2x)^2=20$$

$$5x^2-8x-4=0$$

$$(x-2)(5x+2)=0$$

$$x=2,\ -\frac{2}{5}$$

これより C の座標は $\left(-\frac{2}{5},\ \frac{16}{5}\right)$ である。

(2) $\tan\alpha=\dfrac{2-\left(-\frac{2}{5}\right)}{\frac{16}{5}}=\dfrac{3}{4}$

また $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$ である。

△BCD で正弦定理より，

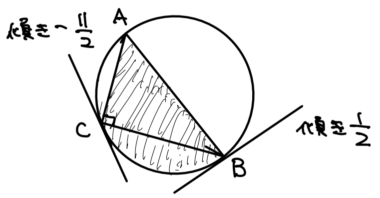
$$\frac{4}{\sin\beta}=2\cdot2\sqrt{5} \quad \therefore\ \sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

これより $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ であり，

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2}{5\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

(3) $ax-y=k$ とおいて，k と直線 n: $y=ax-k$ が共有点をもつ条件を考える。傾き a，y 切片が $-k$ であることに注意する。



B における接線の傾きは $\frac{1}{2}$，

C における接線の傾きは $-\frac{11}{2}$

であるから，$a<-\frac{11}{2}$ のときは n が C を通るとき k は最大であり，そのとき

$k=-\frac{2}{5}a-\frac{16}{5}=-\frac{2}{5}(a+8)$ である。

$\frac{1}{2}\leqq a$ のときは n が B を通るとき k は最大であり，そのとき $k=6a$ である。$-\frac{11}{2}\leqq a<\frac{1}{2}$ のときは n と円弧 BC が接するとき最大で，その条件は n と $(4,4)$ の距離が $2\sqrt{5}$ となることで，

$$\frac{|4a-4-k|}{\sqrt{a^2+1}}=2\sqrt{5}$$

$$4a-4-k=\pm2\sqrt{5(a^2+1)}$$

$$k=4a-4\mp2\sqrt{5(a^2+1)}$$

よって k の最大値は $4a-4+2\sqrt{5(a^2+1)}$

$a \leqq -\frac{11}{2}$ において M は減少関数

$a \geqq \frac{1}{2}$ において M は増加関数

である。$f(a) = 2a-2+\sqrt{5(a^2+1)}$

とおくと、

$$f'(a) = 2+\frac{5a}{\sqrt{5(a^2+1)}}$$

$$= \frac{2\sqrt{a^2+1}+\sqrt{5}a}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$= \frac{4-a^2}{\sqrt{a^2+1}\,(2\sqrt{a^2+1}-\sqrt{5}a)}$$

a	$-\frac{11}{2}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		↘		↗	

これより M が最小となるのは、

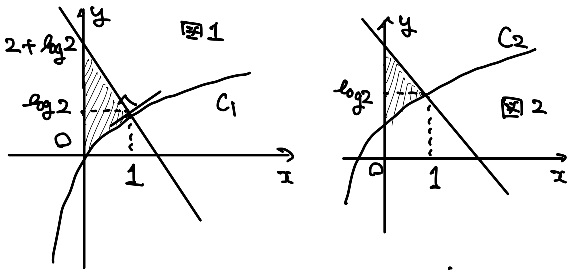
$a = -2$ である。

2

(1) (i) $f'(x) = \frac{1}{x+a}$ であり、$a=1$ のとき $f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ である。このとき、l の方程式は

$$y = -2(x-1)+\log 2$$

$$y = -2x+2+\log 2$$



また、図1の網目部分の面積は

$$\frac{1}{2}\{(2+\log 2)+\log 2\}\cdot 1 - \int_0^1 \log(x+1)\,dx$$

$$= 1+\log 2 - \Big[(x+1)\log(x+1)-x\Big]_0^1$$

$$= 1+\log 2-(2\log 2-1)$$

$$= 2-\log 2$$

(ii) C_2 が $(1,\ \log 2)$ を通るとき

$$\log 2 = p\log 2 + q$$

$$q = (1-p)\log 2$$

また図2の網目部分の面積について、

$$1+\log 2$$

$$-\int_0^1 \{p\log(x+1)+(1-p)\log 2\}\,dx$$

$= 1 + \log 2 - p(2\log 2 - 1)$
$\quad - (1-p)\log 2$

$= -p\log 2 + 1 + p$

これが $\dfrac{\log 2 + 1}{2}$ となるとき，$p = \underline{-\dfrac{1}{2}}$

である．

(2) $g(a) = \displaystyle\int_0^{1-a} (-f(x))\,dx + \int_{1-a}^{1} f(x)\,dx$

$F(x) = (x+a)\log(x+a) - x$

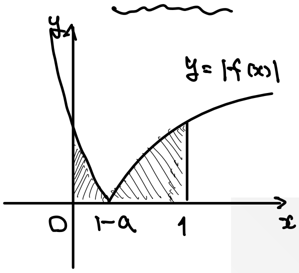
とおくと，

$g(a) = -\Big[F(x)\Big]_0^{1-a} + \Big[F(x)\Big]_{1-a}^{1}$

$= F(0) + F(1) - 2F(1-a)$

$= a\log a + (a+1)\log(a+1)$
$\quad - 1 + 2(1-a)$

$= \underline{(a+1)\log(a+1) + a\log a}$
$\quad \underline{-2a + 1}$



$g'(a) = \log(a+1) + 1 + \log a + 1 - 2$

$= \log a(a+1)$

$a(a+1) = 1$ を解いて

$a^2 + a - 1 = 0 \quad \therefore\ a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$0 < a \leqq 1$ より $a = \underline{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ である．

これより，$\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ とおくと，$g(a)$ の増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		↘		↗	

$g(a) = a\log a(a+1) + \log(a+1)$
$\quad -2a + 1$

$= a g'(a) + \log(a+1) - 2a + 1$

を合わせると，最小値は

$g(\alpha) = \log(\alpha+1) - 2\alpha + 1$

$= \underline{\log\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} + 2 - \sqrt{5}}$

3

(1) $|\alpha| = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$ であり

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2+4i}{1-3i} = \frac{2(1+2i)(1+3i)}{10}$$

$$= \frac{2(-5+5i)}{10} = -1+i$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

となるから、

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{20} = 2^{10}(\cos 15\pi + i\sin 15\pi)$$

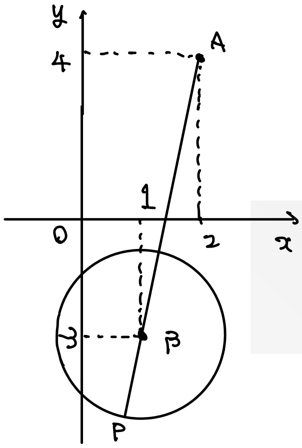
$$= -1024$$

(2) A$(2+4i)$, B$(1-3i)$, P(z) とすると、

$|z-\alpha|$ が最大となるのは、APがBを通るときで、$AB = \sqrt{1^2+7^2} = 5\sqrt{2}$

より、APの最大値は $5\sqrt{2}+\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

である。



また、このとき

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$= (2,4) + \frac{6}{5}(-1,-7)$$

$$= \left(\frac{4}{5}, -\frac{22}{5}\right)$$

となるから、$z = \dfrac{4-22i}{5}$ である。

(3) $\gamma = a+bi$, $z = x+yi$

とすると $\bar{\gamma}z + \gamma\bar{z} = 1$ は

$$(a-bi)(x+yi)+(a+bi)(x-yi)=1$$

$$2(ax+by) = 1$$

$$2ax+2by-1 = 0 \quad \cdots ①$$

となる。ABの方程式は

$$y = 7(x-1)-3$$

$$7x-y-10 = 0$$

$$\frac{7}{10}x - \frac{1}{10}y - 1 = 0 \quad \cdots ②$$

であるから、①と②が一致するとき

$$2a = \frac{7}{10},\quad 2b = -\frac{1}{10}$$

$$a = \frac{7}{20},\quad b = -\frac{1}{20}$$

よって $\gamma = \dfrac{7-i}{20}$ である。

また、$zw = 10$ のとき $z=0$ では成立しないから $z = \dfrac{10}{w}$ であり、

これを $\bar{\gamma}z + \gamma\bar{z} = 1$ に代入すると

$$10\left(\frac{\bar{\gamma}}{w} + \frac{\gamma}{\bar{w}}\right) = 1$$

$$w\bar{w} - 10w\gamma - 10\bar{w}\bar{\gamma} = 0$$

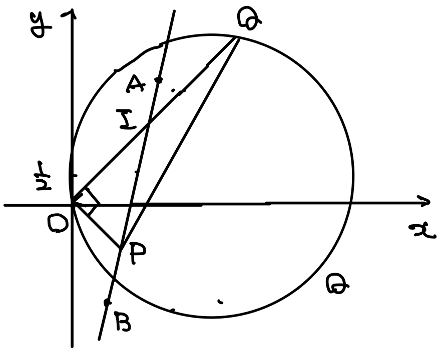
$$(w-10\bar{\gamma})(\bar{w}-10\gamma) = 100|\gamma|^2$$

$$|w-10\bar{\gamma}|^2 = 100|\gamma|^2$$

$$|w-10\bar{\gamma}| = 10|\gamma|$$

$$\left|w-\frac{7+i}{2}\right| = \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad \cdots\cdots ③$$

よって w は点 $\frac{7+i}{2}$ を中心，半径 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ の円上を動く．



③は O を通る．

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2}|z||w|\sin\angle POQ$$

$$= 5\sin\angle POQ$$

であり，

$$\arg\frac{w}{z} = \arg 10w^2 = 2\arg w$$

も合わせると，$\arg w = \frac{\pi}{4}$ のときに

$\angle POQ = \left|\arg\frac{w}{z}\right| = \frac{\pi}{2}$ となり

$\triangle OPQ$ は最大となる．このとき

OQ の方程式は $y = x$ であり，

AB：$y = 7x-10$ と連立すると

$$x = 7x-10 \quad \therefore\ x = \frac{5}{3}$$

となるから，OQ と AB の交点を I としたとき，I の x 座標は $\frac{5}{3}$ である．

さらに，③の

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

と $y = x$ を連立すると，

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

$$2x^2-8x = 0$$

$$x(x-4) = 0 \quad \therefore\ x = 0, 4$$

となり，Q の x 座標は 3 である．

よって，$\triangle OPI : \triangle QPI = \frac{5}{3} : \left(4-\frac{5}{3}\right)$

$= 5:7$ である．