2025年2月11日　実施

東京慈恵会医科大学

医学部　一般　数　学

（制限時間　90分）

解答・解説

[1]

事象 X が起こる確率を $P(X)$ と表す。

(前半) 積が2の倍数になる事象を A,
積が5の倍数になる事象を B とすると

$$P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})$$
$$=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})$$
$$=1-\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}$$
$$=1-\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{2}{6}\right)^3\right\}$$
$$=1-\frac{27}{216}-\frac{125}{216}+\frac{8}{216}=\frac{1}{3}$$

(後半) X_1+X_2 が6の倍数となる事象を C
X_2+X_3 が6の倍数となる事象を D
X_3+X_1 が6の倍数となる事象を E とおく

$$P(\overline{C}\cap\overline{D}\cap\overline{E})=1-P(C\cup D\cup E)$$
$$=1-\{P(C)+P(D)+P(E)-P(C\cap D)-P(D\cap E)-P(E\cap C)+P(C\cap D\cap E)\}$$
$$=1-\left\{\left(\frac{6}{36}\right)+\left(\frac{6}{36}\right)+\left(\frac{6}{36}\right)-\left(\frac{6}{216}\right)-\left(\frac{6}{216}\right)-\left(\frac{6}{216}\right)+\left(\frac{2}{216}\right)\right\}$$
$$=1-\frac{92}{216}=\frac{31}{54}$$

[2]

(1) $0\leqq x\leqq 1$ において

$\log n\leqq\log(n+x)\leqq\log(n+1)$ より

$$\frac{x}{\log(n+1)}\leqq\frac{x}{\log(n+x)}\leqq\frac{x}{\log n}$$

であるから $0\leqq x\leqq 1$ で定積分すると

$$\int_0^1\frac{x}{\log(n+1)}dx\leqq\int_0^1\frac{x}{\log(n+x)}dx\leqq\int_0^1\frac{x}{\log n}dx\quad\cdots①$$

が成立し，

$\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$ より

①に代入して

$$\frac{1}{2\log(n+1)}\leqq\int_0^1\frac{x}{\log(n+x)}dx\leqq\frac{1}{2\log n}$$

は示された。■

(2) $$\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx=\int(\log x)^{-2}\times(\log x)'dx$$
$$=-(\log x)^{-1}+C$$
$$=-\frac{1}{\log x}+C\ (C:\text{積分定数})$$

(3) (1)より

$$\frac{2}{k\log k}\cdot\frac{1}{2\log(k+1)} \leqq \frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \frac{2}{k\log k}\cdot\frac{1}{2\log k}$$

$k\log k \leqq (k+1)\log(k+1)$ と合わせて

$$\frac{1}{k\log k\log(k+1)} \leqq \frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \frac{1}{k(\log k)^2} \quad \cdots (*)$$

となる。ここで

$$\frac{1}{k\log k\log(k+1)} = \left(\frac{1}{\log k}-\frac{1}{\log(k+1)}\right)\frac{1}{k\log(1+\frac{1}{k})}$$

$$\geqq \left(\frac{1}{\log k}-\frac{1}{\log(k+1)}\right)\times\frac{1}{k\times\frac{1}{k}}$$

$$= \frac{1}{\log k}-\frac{1}{\log(k-1)}$$

($t \geqq 0$ において $\log(1+t) \leqq t$ を用いた)

この両辺に $k=n, n+1, \cdots, m$ として和をとると

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k\log k\log(k+1)} > \sum_{k=n}^{m}\left(\frac{1}{\log k}-\frac{1}{\log(k+1)}\right) = \frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(m+1)} \quad \cdots ②$$

また、$k-1 \leqq x \leqq k$ において

$\frac{1}{k(\log k)^2} \leqq \frac{1}{x(\log x)^2}$ であるから

$k-1 \leqq x \leqq k$ で積分して

$k=n, n+1, \cdots, m$ として和をとると

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k(\log k)^2} \leqq \sum_{k=n}^{m}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x(\log x)^2}dx$$

$$= \int_{n-1}^{m}\frac{1}{x(\log x)^2}dx$$

$$= \frac{1}{\log(n-1)}-\frac{1}{\log m} \quad ((2)より) \quad \cdots ③$$

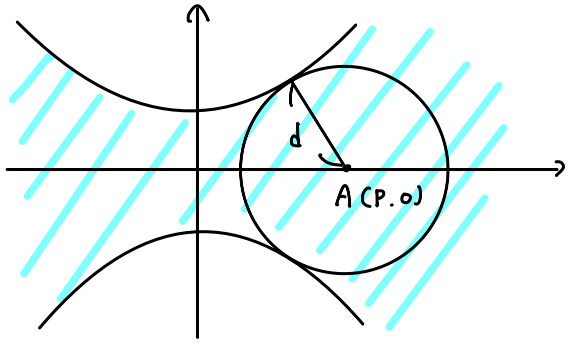
(*)において $k=n, n+1, \cdots, m$ として和をとり、

②、③から

$$\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(m+1)} \leqq \sum_{k=n}^{m}\frac{2}{k\log k}\int_0^1\frac{x}{\log(x+k)}dx$$

$$\leqq \frac{1}{\log(n-1)}-\frac{1}{\log m}$$ は示された■

[3] $C: x^2-py^2=-1$ 上の点(X, Y)と点$A(p, 0)$の距離dを考える。



$$d^2=(X-p)^2+Y^2$$

$$=(X-p)^2+\frac{1}{p}(X^2+1)$$

$$=\left(1+\frac{1}{p}\right)X^2-2pX+p^2+\frac{1}{p}$$

$$=\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(X-\frac{p^2}{p+1}\right)^2+p-1+\frac{2p+1}{p(p+1)}$$

円が領域Dに含まれる中で最大となるのはd^2が最小となるときである。

$$f(p)=p-1+\frac{2p+1}{p(p+1)}=p-1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}$$

とおくと $p \geqq 2$ より

$$p-1 < f(p) < p-\frac{1}{6}$$

よって r は $p-1$

(2) $(x-p)^2+y^2=p-1 \cdots (*)$

(i) $p=2$ のとき $(x-2)^2+y^2=1$ となるが、
$(x-2)^2 \geqq 0$, $y^2 \geqq 4$ より、これをみたす
素数の組 (x,y) は存在しない。

(ii) $p \geqq 3$ のとき、(右辺) $=p-1$ は必ず偶数。
x, y がともに奇数のとき
(左辺) $=(x-p)^2+y^2$ は奇数となり等号不成立
よって x, y のうち一方は2である。

① $x=2$ のとき、$(*)$ に代入して、
$(2-p)^2+y^2=p-1$
$p^2-5p+y^2+5=0$
$\left(p-\frac{5}{2}\right)^2+y^2-\frac{5}{4}=0$.
$(2p-5)^2+(2y)^2=5$
$(2p-5)^2>0$ かつ $(2y)^2 \geqq 36$ より
これをみたす素数の組 (y,p) は
存在しない。

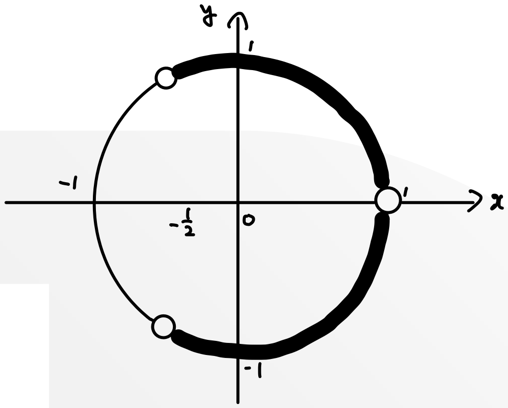
② $y=2$ のとき $(*)$ に代入して
$(x-p)^2+4=p-1$
$(x-p)^2=p-5$
$p-5$ が平方数になる最小の素数
p は 41
このとき、$x-41=\pm 6$ であり
x は素数だから $x=47$
したがって求める素数の組
$(x, y, p)=(47, 2, 41)$

[4]

$w=z-1$ とおくと
$z+\frac{1}{z-1}=w+\frac{1}{w}+1$ と表せ
$w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0, -\pi<\theta\leqq\pi)$
とおくと、
$z+\frac{1}{z-1}=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)+1$
$=\left\{\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+1\right\}+\left(r-\frac{1}{r}\right)i\sin\theta$

これが正の実数となる条件は
$\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+1>0 \cdots$ ① かつ $\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta=0 \cdots$ ②
z は実数でないから w も実数でないので
$\theta\neq 0$ で ② より $r-\frac{1}{r}=0$ から $r=1$

このとき ① より $2\cos\theta+1>0$ より
$-\frac{2}{3}\pi<\theta<0, 0<\theta<\frac{2}{3}\pi$ となる。
これより、w の存在範囲は下図の太線部



このとき、$r=1$ に注意すると、
$\frac{1}{z-1}-\frac{z-\bar{z}}{2}+1$
$=\frac{1}{w}-\frac{2i\sin\theta}{2}+1$
$=\cos\theta-i\sin\theta-i\sin\theta+1$
$=1+\cos\theta-2i\sin\theta$
であるから、

$$\left|\frac{1}{z-1}-\frac{z-\bar{z}}{2}+1\right|^2$$

$$=(1+\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2$$

$$=1+2\cos\theta+\cos^2\theta+4(1-\cos^2\theta)$$

$$=-3\cos^2\theta+2\cos\theta+5$$

$$=-3\left(\cos\theta-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{16}{3}$$

$-\frac{1}{2}<\cos\theta<1$ より

$$\frac{13}{4}<\left|\frac{1}{z-1}-\frac{z-\bar{z}}{2}+1\right|^2\leqq\frac{16}{3}$$

よって

$$\frac{\sqrt{13}}{2}<\left|\frac{1}{z-1}-\frac{z-\bar{z}}{2}+1\right|\leqq\frac{4\sqrt{3}}{3}$$