

$$(1) \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1, \quad y = -2x + 2. \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

①②を連立して y を消去すると

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(-2x+2)^2}{8} = 1.$$

$$x^2 + (x-1)^2 = 2.$$

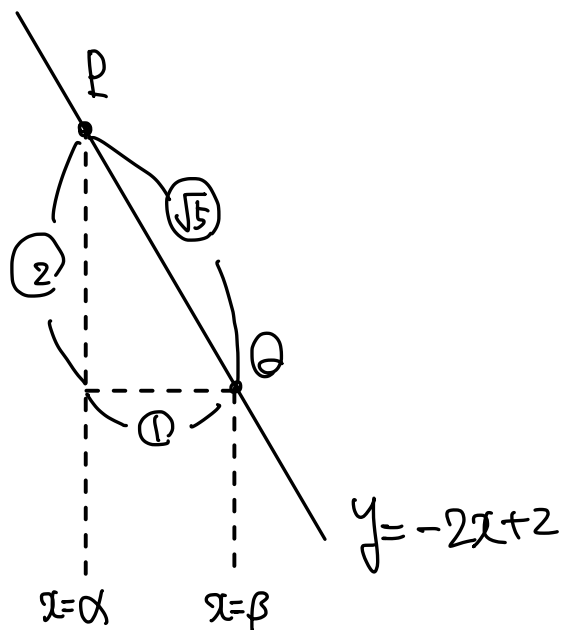
$$2x^2 - 2x - 1 = 0.$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \quad \beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ とおくとき.}$$

直線②の傾きが -2 だから

$$PQ = (\beta - \alpha) \times \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{15}$$



(2) 1つのさいころの出目を3で割った
余りは0または1または2であり
これは同様に確かめられる。

2つのさいころの出目の和が3で
割り切れるのは、それぞれの出目のさいころ
の出目を3で割った余りを r_1, r_2 と
おくと

$$(r_1, r_2) = (0, 0), (1, 2), (2, 1)$$

のときのみ。したがって

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$r_1 \backslash r_2$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

The diagram shows a triangle ABC with vertex O above it. Point C is on side AB , and point D is on side BC . Line segments OC and OD are drawn. Point P is the intersection of OC and OD . Point Q is on side AB , and point E is on side AC . Line segments EQ and PQ are drawn. Circled numbers 1 and 2 are placed near various points and lines.

$$\frac{OC}{CA} \times \frac{AF}{FB} \times \frac{QP}{PO} = 1$$

$\triangle OQB$ と直線 DE でメネラウスの定理を用いて.

$$\frac{OP}{PQ} \times \frac{QE}{EB} \times \frac{1}{2} = 1 \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{AF}{FQ} \times \frac{QE}{EB} = 1$$

$$AE = EF = FB \Rightarrow QE = 4FQ$$

$$QE = AB \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15} AB$$

$$\begin{aligned} \text{∴ 又) } AF = FQ &= \frac{2}{3}AB = \frac{1}{15}AB \\ &= 10 : 1 \end{aligned}$$

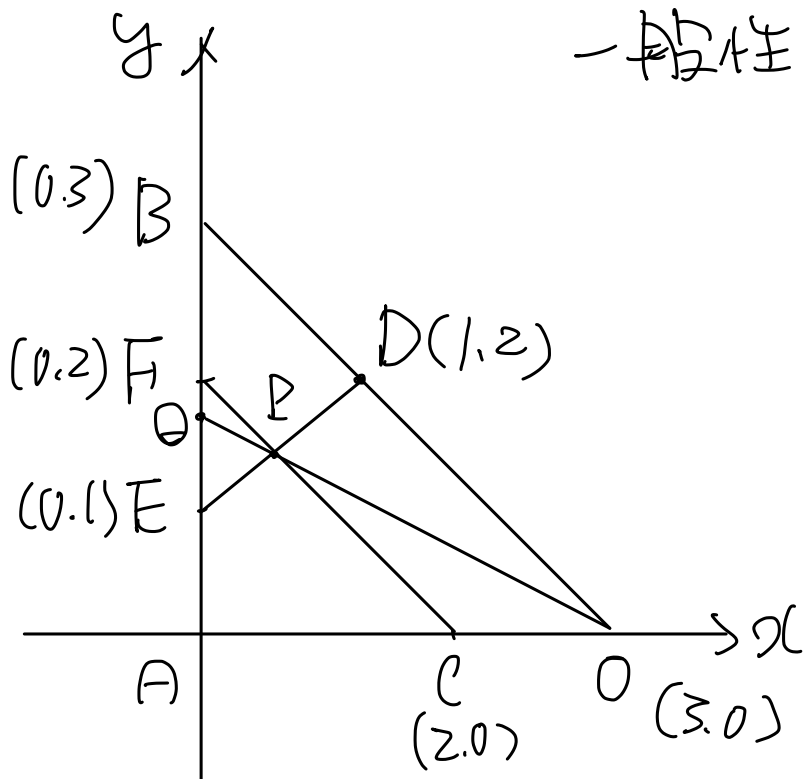
$$\frac{QP}{PO} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \frac{OP}{OQ} = \frac{5}{6}$$

(別解1)

$O(3,0)$ $A(0,0)$ $B(0,3)$ $\hookrightarrow x$ 座標平面上で考えれば

一般性を失わない



$$CF: y = -x + 2$$

$$DE: y = x + 1$$

$$\text{よって } P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

よって $OP = OQ$ は x 座標の差を考えると

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{5}{6}$$

(別解2) $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ とおく

点CはOAを1:2に内分する点で、 $\vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{a}$.

点DはOBを2:1に内分する点で、 $\vec{OD} = \frac{2}{3}\vec{b}$.

点E, 点FはABを1:2, 2:1にそれぞれ内分する点で

$$\vec{OE} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}, \quad \vec{OF} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

点PはCF上にあり $\vec{OP} = (1-s)\vec{OC} + s\vec{OF}$ とおける.

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \frac{1-s}{3}\vec{a} + s\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2s}{3}\vec{b}. \quad \text{--- ①}\end{aligned}$$

点PはDE上にあり $\vec{OP} = (1-t)\vec{OD} + t\vec{OE}$ とおける

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \frac{2(1-t)}{3}\vec{b} + t\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \\ &= \frac{2t}{3}\vec{a} + \frac{2-t}{3}\vec{b}. \quad \text{--- ②}\end{aligned}$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1次元独立なので ①, ②より

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{2t}{3} \\ \frac{2s}{3} = \frac{2-t}{3} \end{cases} \quad \therefore t = \frac{1}{2}, s = \frac{3}{4}$$

したがって $\vec{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

またQはOP上にあり $\vec{OQ} = k\vec{OP}$ とおける

$$\vec{OQ} = \frac{k}{3}\vec{a} + \frac{k}{2}\vec{b}.$$

QはAB上にあり $\frac{k}{3} + \frac{k}{2} = 1 \quad \therefore k = \frac{6}{5}$.

したがって $\vec{OQ} = \frac{6}{5}\vec{OP}$.

より $\frac{OP}{OQ} = \frac{5}{6}$

$$(4) \log_2(4-x^2-y^2) + \log_2 \frac{1}{2}(x+1) < 1$$

真数条件より

$$4-x^2-y^2 > 0, x+1 > 0,$$

$$\therefore \begin{cases} x^2+y^2 < 4 \\ x > -1 \end{cases} \quad \text{--- ①}$$

$$\text{このとき } \log_2(4-x^2-y^2) < \log_2 2(x+1).$$

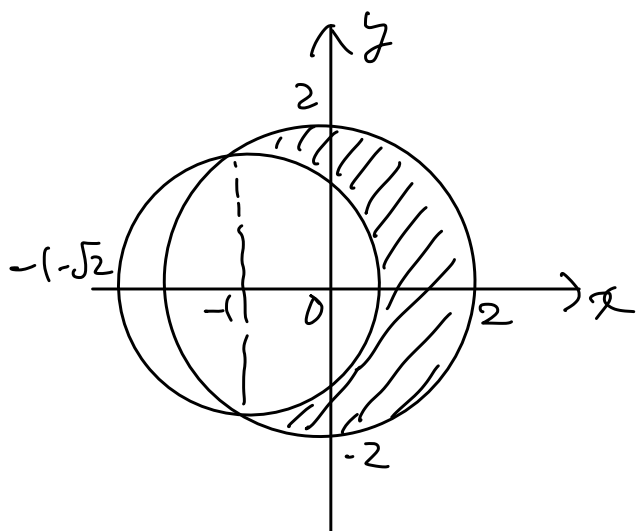
両辺より大きいので

$$4-x^2-y^2 < 2(x+1).$$

$$x^2+2x+y^2 > 2.$$

$$(x+1)^2+y^2 > 3. \quad \text{--- ②}$$

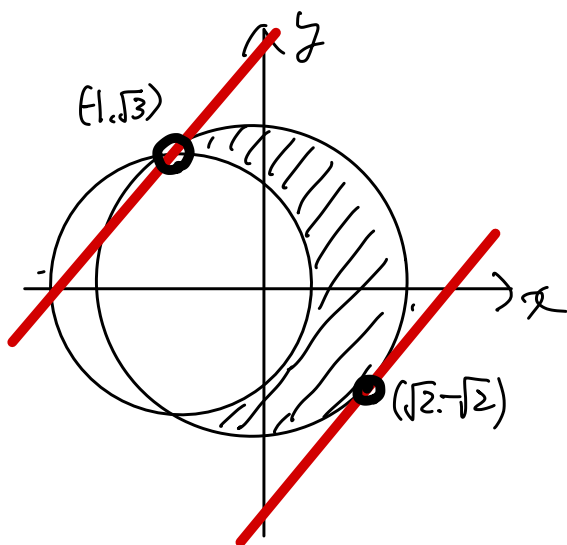
①・②の不等式を満たす (x, y) は
 xy 平面上で、図の斜線部分にある。
 (ただし境界除く)



$$x-y=k \text{ として}$$

$$y=x-k$$

これは傾き1, y切片が $-k$ の直線
 を表す。この直線が図の
 斜線域と共有点をもつ条件を
 調べる。



k の上限

y 切片の下限を調べるには
 ので点 $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ を通るときを考え

$$k = x - y = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

k の下限

点 $(-1, \sqrt{3})$ を通るときを考え

$$k = x - y = (-1) - \sqrt{3} = -1 - \sqrt{3}$$

(したがって)

$$\boxed{-1 - \sqrt{3} < k < 2\sqrt{2}}$$

$$(1) \quad g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x-1}}, \quad h(x) = \sqrt{x-1} \text{ とおく}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) = -\pi \text{ かつ } \lim_{x \rightarrow 1+0} h(x) = 0 \text{ かつ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) \times h(x) = -\pi \times 0 = 0$$

$$\text{つまり } \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0 \text{ が必要である}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \cos b = 0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{ここで } \sqrt{x-1} = t \text{ とおく. } x \rightarrow 1+0 \text{ のとき } t \rightarrow +0$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\cos(a\sqrt{x-1}+b)}{\sqrt{x-1}} = \frac{\cos(at+b)}{t} \\ &= \frac{\cos(b+at) - \cos b}{at} \times a \end{aligned}$$

$$\text{ここで } F(x) = \cos x \text{ とおくとき}$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{F(b+at) - F(b)}{at} = F'(b) = -\sin b$$

$(F'(b)) \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) = -a \sin b = -\pi.$$

$$\text{① かつ } \sin b = 1 \text{ かつ } -1 \text{ かつ } a > 0 \text{ かつ}$$

$$a = \pi, \sin b = 1.$$

$$0 < b < a \text{ かつ } (a, b) = \left(\pi, \frac{\pi}{2} \right)$$

(2) (1) より

$$f(x) = \cos\left(\pi\sqrt{x-1} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x-1 = t \text{ かつ } t \geq 0 \quad dx = dt$$

$$x: 1 \rightarrow 5 \text{ かつ } t: 0 \rightarrow 4$$

$$f(x) = \cos\left(\pi\sqrt{t} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\pi\sqrt{t}$$

$$\sqrt{t} = u \text{ かつ } t \geq 0 \quad t: 0 \rightarrow 4 \text{ かつ } u: 0 \rightarrow 2$$

$$t = u^2 \quad \therefore dt = 2u du$$

$$(5) = \int_0^4 -\sin\pi\sqrt{t} dt = -\int_0^2 \sin\pi u \cdot 2u du$$

$$= -2 \int_0^2 u \sin\pi u du$$

$$= 2 \int_0^2 u \left(\frac{1}{\pi} \cos\pi u\right)' du$$

$$= \left[2u \cdot \frac{1}{\pi} \cos\pi u\right]_0^2 - 2 \int_0^2 \frac{1}{\pi} \cos\pi u du$$

$$= \frac{4}{\pi} \dots (ii)$$