昭和大学

1. 複素数 α, β が

$$|\alpha| = \sqrt{2},\ |\beta| = 4,\ |4\alpha - \beta| = 4$$

を満たしているとする．次の問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

（1） $\dfrac{\beta}{\alpha}$ および $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^4$ の値を求めよ．

（2） $|\alpha + \beta|$ の値を求めよ．ただし，絶対値の記号を用いないこと．

（3） n は 16 で割って 3 余る整数とする．次の等式が成り立つように a, b を n の式で表せ．

$$|\alpha^n + \beta^n| = \sqrt{2^n(1 - 2^a + 2^b)}$$

（4） 複素数平面において 3 点 O, α, β を頂点とする三角形の面積 S を求めよ．

2.（1）（i） 2025 と 1928 の最大公約数を求めよ．

（ii） 次の式が恒等式となるように**正の整数** a_1, a_2, a_3, a_4 を定めよ．

$$\frac{2025}{1928} = 1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}}$$

（2） a, b は $a < b$ を満たす**整数**，$f(x) = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)\left(x - \dfrac{b}{2}\right)$, $g(x) = f(x^2 - 2)$ とする．$g(x)$ が $f(x)$ で割りきれるような**整数** (a, b) の組をすべて求めよ．なお，解答欄には左から a の値が小さい順に並べて記入すること．a の値が等しい場合には左から b の値が小さい順に並べること．

（3） 不等式

$$\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| + \left|\log_{\frac{1}{2}} y\right| \leqq 1$$

の表す領域を E とする．

（i） 領域 E を図に示せ．ただし，領域 E の内部は斜線で示し，境界上の点を含む場合は実線で，境界上の点を含まない場合は破線で示すこと．必要最小限の注釈は図中に加えてもよい．

（ii） 領域 E の面積 S を求めよ．

（4） 数列 $\{a_n\}$ の一般項を $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする．このとき，S_{2025} の**整数部分**を求めよ．必要であれば $\sqrt{2026}$ の値は $\sqrt{2025}$ の値で近似せよ．

3. xyz 空間に 3 点 A，B，C がある．A は xy 平面上にあり，OA $= 1$ である．B，C は yz 平面上の点で，y 軸に関して対称である．三角形 OAB が正三角形であり，3 点 A，B，C は y 軸上にないものとする．次の各問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

（1） B の y 座標を t とするとき，t がとり得る値の範囲を求めよ．

（2） 四面体 OABC の表面積の最大値を求めよ．

（3） 表面積が最大となる四面体 OABC を x 軸，y 軸，z 軸の周りに回転してできる立体の体積をそれぞれ V_x, V_y, V_z とするとき，V_x, V_y, V_z を求めよ．

4. 座標平面上の点 $(1, 0)$ に物体 A がある．さいころを振り，1 または 2 の目が出たら，原点のまわりに 15 度時計と逆回りに回転させ，3 から 6 の目が出たときには，原点のまわりに回転させずに，原点から距離 1 だけ遠ざける．物体 A が y 軸に達するまでこれを続ける．このとき，物体 A が点 $(0, n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に達する確率を P_n とする．次の問いに答えよ．ただし，答えは結果のみを解答欄に記入せよ．

（1） P_1, P_2, P_3 を求めよ．

（2） 物体 A が点 $(0, n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に達する確率 P_n を求めよ．

（3） P_n を最大にする n をすべて求めよ．