日本医科大学・後期

1．中が見える番号付きの 3 つの箱，箱 1，箱 2，箱 3 の中に，それぞれ白球が 1 個ずつ入っている．また，箱の外に，白球，黒球がそれぞれ十分多くある．1 から 6 の目をもつ 1 つのさいころを 1 回投げて出た目を n とするとき，出た目に応じて以下の操作を行う．

（i） $n=1, 2, 3$ の場合，箱 n の中に白球が入っている場合には，その 1 つの白球を箱の外にある 1 つの黒球と入れかえる．ただし，箱 n の中に黒球が入っている場合には何も操作をしない．

（ii） $n=4, 5$ の場合，箱 1，箱 2，箱 3 のいずれかの中に黒球が入っている場合には，黒球が入っているすべての箱に対し，その 1 つの黒球を箱の外にある 1 つの白球と入れかえる．ただし，箱の中に入っている球がすべて白球である場合には何も操作をしない．

（iii） $n=6$ の場合，箱 1，箱 2，箱 3 のいずれかの中に白球が入っている場合には，白球が入っているすべての箱に対し，その 1 つの白球を箱の外にある 1 つの黒球と入れかえる．ただし，箱の中に入っている球がすべて黒球である場合には何も操作をしない．

さいころを 3 回続けて投げたとき，以下の各問いの空欄に適する 1 以上の整数を求めよ．ただし，分数は既約分数で答えること．

（1） 箱 1，箱 2，箱 3 の中に入っている球がすべて白球である確率は $\dfrac{\square}{\square}$ となる．

（2） 箱 1，箱 2 の中に入っている球が共に黒球であり，箱 3 の中に入っている球が白球である確率は $\dfrac{\square}{\square}$ となる．

（3） 箱 1 の中に入っている球が黒球であり，箱 2，箱 3 の中に入っている球が共に白球である確率は $\dfrac{\square}{\square}$ となる．

（4） 箱 1 の中に入っている球が黒球であるという条件のもとで，箱 3 の中に入っている球が白球である確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

2．実数の定数 a, b は $0<a<1<b$ を満たすとする．xy 平面内において不等式

$$x^2+\frac{(y-b)^2}{a^2} \leqq 1$$

により定まる領域を，x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を $V(a, b)$ とするとき，以下の各問いに答えよ．

（1） $V(a, b)$ を a と b を用いて表せ．答えのみでよい．

（2） n, j を 1 以上の整数として，$V(a, b)$ に対して $W_{n,j}(a)$ を次で定める．

$$W_{n,j}(a)=V\left(a^{n-1}, 1+\frac{2j-1}{2^{n-1}}\right)$$

この $W_{n,j}(a)$ に対して $X_n(a)$ を次で定める．

$$X_n(a)=\sum_{j=1}^{2^{n-1}} W_{n,j}(a)$$

$X_n(a)$ を a と n を用いて表せ．答えのみでよい．

（3） （2）の $X_n(a)$ に対して次の無限級数が収束するための a に対する必要十分条件を求め，そのときの無限級数の和を a を用いて表せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} nX_n(a)$$

なお必要ならば，$-1<r<1$ を満たす実数の定数 r に対して次が成り立つことを用いてよい．

$$\lim_{n\to\infty} nr^n=0$$

3. Oを原点とする座標平面において，曲線 C を次で定める．

$$C : x^2 + 2y^2 = 2 \quad (x > 0,\ y < 0)$$

曲線 C 上の点を $\mathrm{P}(\sqrt{2}\cos\theta,\ -\sin\theta)$（ただし，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$）とおき，点Pにおける曲線 C の法線を L_θ とおく．また，連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{4} \\ 0 \leqq y \end{cases}$$

によって定まる座標平面上の領域を R とおく．点Pが曲線 C 上を動くとき，法線 L_θ と R の共通部分からなる線分が通過する領域を D とおく．このとき，以下の各問いに答えよ．

（1） 法線 L_θ の方程式を次の形で表すとき，空欄に適する θ の式を求めよ．答えのみでよい．

$$y = \square x + \square$$

（2） k を $0 < k < 1$ を満たす定数とする．関数 $f(\theta) = -k\tan\theta + \sin\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ に対して，θ の方程式 $f'(\theta) = 0$ の解を α とし，θ の方程式 $f(\theta) = 0$ の解を β とする．このとき，$f(\alpha)$ を k を用いて表し，関数 $y = f(\theta)$ のグラフの概形をかけ．ただし，グラフの凹凸は考えなくてよい．

（3） D の概形を図示せよ．また，D の境界を表す方程式を図中に記入せよ．

（4） D の面積 S を求めよ．ただし，D の境界の面積は0とみなしてよい．

4. i を虚数単位とし，複素数 z に対して，z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表す．Oを原点とする複素数平面において，z を $|z| = 1$，かつ $\dfrac{z - \overline{z}}{2i} > 0$ を満たす複素数とし，1以上の整数 n に対して，次の規則 $(R_n[z])$ により複素数 w_n を定める．

$(R_n[z])$：「3点 $\mathrm{A}(\alpha_n)$, $\mathrm{B}(\beta_n)$, $\mathrm{C}(\gamma_n)$ を

$$\alpha_n = z^{4n},\ \beta_n = |z+1|^2 z^{4n+1},\ \gamma_n = z^{4n+2}$$

により定め，三角形ABCの重心を $\mathrm{G}(w_n)$ とおく．」

ここで，複素数 w_n が次の2つの条件

$$\text{(i)}\quad w_n + \overline{w_n} = 0, \qquad \text{(ii)}\quad \frac{w_n - \overline{w_n}}{2i} > \frac{2}{3}$$

を共に満たす複素数 z の個数を N_n とし，それら N_n 個の複素数を次のように表す．

$$z_{n,k} = \cos(\theta_{n,k}) + i\sin(\theta_{n,k}) \quad (k = 1, 2, \cdots, N_n,\ 0 < \theta_{n,1} < \theta_{n,2} < \cdots < \theta_{n,N_n} < \pi)$$

また，$z = z_{n,k}$ に対して，規則 $(R_n[z_{n,k}])$ により定まる三角形ABCの重心を表す複素数を $w_{n,k}$ とおく．このとき，以下の各問いに答えよ．

（1） N_n と $\theta_{n,k}$ を求めよ．

（2） $(z_{n,k})^{4n+1}$ を求めよ．答えのみでよい．

（3） 次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{k-1}{2N_n}\pi \leqq \theta_{n,k} \leqq \frac{k}{2N_n}\pi \quad (k = 1, 2, \cdots, N_n)$$

（4） 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N_n}\sum_{k=1}^{N_n} \frac{w_{n,k}}{i}$$