久留米大学・後期

1. 次の問いに答えよ．

（1） a は実数とする．x の 2 次方程式

$x^2-2ax+2a^2-6a+1=0$

が実数解をもつとき，判別式を利用して a のとる値の範囲は

$\boxed{ア}-\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}} \leqq a \leqq \boxed{ア}+\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}}$

である．

（2） 実数 a を変化させたときに，（1）の実数解 x のとる値の範囲を求めると $-\boxed{エ} \leqq x \leqq \boxed{オ}$ となる．

（3） a, b は異なる実数で，2 つの 2 次方程式

$x^2-2ax+2a^2-6a+1=0,$

$x^2-2bx+2b^2-6b+1=0$

が共通解をもつとき，その共通解を c として，

$a+b=c+\boxed{カ}$，$ab=\dfrac{c^2+\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$

となる．$d=|a|+|b|+|c|$ とおく．c を変化させるとき，d の値の範囲は $\boxed{ケ} \leqq d < \boxed{コサ}$ である．

2. $\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OB}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ $(0<\theta<\pi)$ を満たす三角形 OAB があり，OA の中点を M，OB を 1 : 2 に内分する点を N として，2 本の線分 AN，BM の交点を P とする．

（1） $\mathrm{AP}:\mathrm{PN}=\boxed{シ}:\boxed{ス}$ かつ $\mathrm{OP}=\dfrac{1}{\boxed{セ}}\sqrt{\boxed{ソ}+\boxed{タ}\cos\theta}$ である．

（2） $a=\lim\limits_{\theta\to+0}\mathrm{OP}$ とすると，$a=\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ であり，$\lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{a-\mathrm{OP}}{\theta^2}=\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{トナ}}$ である．

3. xy 平面の原点を O とする．O から x 軸の正方向に 1 だけ進んだ点 $(1, 0)$ を P_1 とする．そこから進行方向を反時計回りに 120° 変え，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だけ進んだ点を P_2 とする．さらに進行方向を反時計回りに 120° 変え，$\dfrac{1}{2}$ だけ進んだ点を P_3 とする．同様に，$\mathrm{P}_4, \mathrm{P}_5, \cdots$ を 120° ずつ反時計回りに進行方向を変え，進む長さを前回の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍にして得られる点とするとき，次の問いに答えよ．

（1） P_2 の座標は $\left(\boxed{ニ}-\dfrac{\sqrt{\boxed{ヌ}}}{4}, \dfrac{\sqrt{\boxed{ネ}}}{4}\right)$，$\mathrm{P}_3$ の座標は $\left(\dfrac{\boxed{ノ}-\sqrt{\boxed{ハ}}}{4}, \dfrac{\sqrt{\boxed{ヒ}}-\sqrt{\boxed{フ}}}{4}\right)$ である．

（2） 点 P_n は n を大きくすると，ある点 P_∞ に近づく．P_∞ の座標は

$\left(\dfrac{\boxed{ヘホ}-\sqrt{\boxed{マ}}}{14}, \dfrac{\boxed{ミ}\sqrt{\boxed{ム}}-\boxed{メ}\sqrt{\boxed{モ}}}{14}\right)$ である．

（3） 三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{2n}\mathrm{P}_{3n}$ が直角三角形となるのは，$n=\boxed{ヤ}$ のときである．

4. n を自然数とする．n 以下の自然数のうち，n と共通な素因数がちょうど 1 つとなるものの個数を $E(n)$ と表すこととする．

例えば，12 以下の自然数で 12 と共通な素因数がちょうど 1 つとなるものは 2, 3, 4, 8, 9, 10 の 6 個であるから，$E(12)=6$ となる．このとき，以下の問いに答えよ．

（1） $E(2025)$ を考える．2025 以下の自然数のうち 3 の倍数は $\boxed{ユヨラ}$ 個，5 の倍数は $\boxed{リルレ}$ 個，15 の倍数は $\boxed{ロワヲ}$ 個あり，$2025=3^4\cdot5^2$ と表せることから，$E(2025)=\boxed{ンあい}$ となる．

（2） p を奇数の素数とし，a, b を自然数とする．

$n=2^ap^b$ とすると，n 以下の自然数のうち 2 の倍数は $2^{\boxed{う}}p^{\boxed{え}}$ 個，p の倍数は $2^{\boxed{お}}p^{\boxed{か}}$ 個，$2p$ の倍数は

$2^{\boxed{き}}p^{\boxed{く}}$ 個あるから，

$$E(n)=2^{\boxed{う}}p^{\boxed{え}}+2^{\boxed{お}}p^{\boxed{か}}-2\cdot 2^{\boxed{き}}p^{\boxed{く}}$$

となる．したがって，$\dfrac{E(n)}{n}$ は p の値によらず，一定値 $\dfrac{\boxed{け}}{\boxed{こ}}$ である．

ただし，$\boxed{う}$ ～ $\boxed{く}$ は次の選択肢から適当なものを選んで番号を答えよ．同じ番号を何回選んでもよい．

① $a-1$　② a　③ $a+1$　④ $b-1$　⑤ b　⑥ $b+1$

（3） q, r を 2 つの異なる奇数の素数とし，c, d を自然数とする．

$n=q^cr^d$ とするとき，$\dfrac{E(n)}{n}$ のとりうる値のうち 4 番目に大きい値は $\dfrac{\boxed{さし}}{\boxed{すせ}}$ である．

5. $f(x)=x^3-2x$ とする．

（1） $p\neq 0$ のときは，曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p, f(p))$ における接線 l が C と再び交わる点を $\mathrm{Q}(q, f(q))$ とする．ただし $p=0$ のときは $\mathrm{Q}=\mathrm{P}$ とする．$p=0$ のときを含めて $q=-\boxed{そ}p$ となる．PQ を $t:(1-t)$ に分ける点 R を $\mathrm{R}(x, y)$ とすると，

$$x=(1-t)p+tq,\ y=(1-t)f(p)+tf(q)$$

が成り立つ．$0\leqq t\leqq 1$ のときは内分，$t<0$ または $t>1$ のときは外分である．

t を定数として p を実数全体で動かしたとき，R は直線または曲線を描き，

$t=\dfrac{\boxed{た}}{\boxed{ち}}$ のときは直線 $x=\boxed{つ}$ を描く．

$t=\dfrac{\boxed{て}}{\boxed{と}}$ のときは直線 $y=-\boxed{な}x$ を描く．

これら以外のときは $y=ax^3-\boxed{に}x$ ……Ⓐ

の形の 3 次関数のグラフを描く．

（2） $g(t)=\dfrac{1-9t}{(1-3t)^3}$ とする．$g'(t)=-\dfrac{\boxed{ぬね}t}{(1-3t)^4}$ である．

（3）（1）の曲線 Ⓐ を与えるような実数 t が 3 つ存在するのは a が $\boxed{の}<a<\boxed{は}$ のときである．