久留米大学・前期

1. （1） x, y, a, b を正の実数とする．

$a^x = b^y = \sqrt{ab}$

を満たしているとき，a, b の値によらず，$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \boxed{\text{ア}}$ となる．また，$\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)(4x + y)$ の最小値は $\boxed{\text{イ}}$ である．

よって，$4x + y$ は $(x, y) = \left(\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}, \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)$ において最小値 $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ をとることがわかる．

（2） x, y, z, a, b, c を正の実数とする．

$a^x b^y = b^y c^z = c^z a^x = abc$

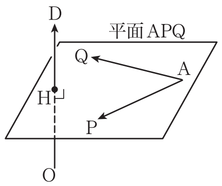
を満たしているとき，$x + 4y + z$ は $(x, y, z) = \left(\boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}}, \boxed{\text{サ}}\right)$ において最小値 $\boxed{\text{シ}}$ をとる．

2. 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC があり，OB の中点を P，OC を 1：2 に内分する点を Q とする．また $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする．次の問いに答えよ．

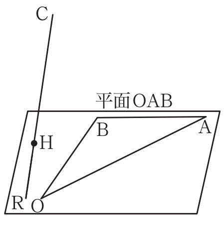
（1） $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\vec{c} - \vec{a}$ である．x, y, z を 0 でない実数とし，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = x\vec{a} + y\overrightarrow{\mathrm{OP}} + z\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とする．内積 $\overrightarrow{\mathrm{OD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ であるとき $\dfrac{z}{x} = -\boxed{\text{チ}}$ である．このとき，さらに内積 $\overrightarrow{\mathrm{OD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 0$ であるとき $\dfrac{y}{x} = -\boxed{\text{ツ}}$ となる．

（2） 平面 APQ 上の点 H について OH は平面 APQ と垂直であるとする．

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = -\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{10}\vec{a} + \dfrac{\boxed{\text{ト}}}{10}\vec{b} + \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{10}\vec{c}$ である．



さらに，直線 CH と平面 OAB の交点を R とすると $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{\boxed{\text{ニ}}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となり，OR と AB は平行であることがわかる．



3. （1） 3 次関数 $f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 6x + 3$ を考える．$y = f(x)$ において，極値をとるグラフ上の 2 点を A，B とする．これらの 2 点をいずれも通る直線の方程式は $y = -\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{2}x + \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{2}$ である．

（2） 4 次関数 $g(x) = 3x^4 - 8x^3 + 12x$ について，以下の問いに答えよ．

（i） $g(x)$ を $g'(x)$ で割ると，商は $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{4}x - \dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{6}$，余りは $-\boxed{\text{ヒ}}x^2 + \boxed{\text{フ}}x + \boxed{\text{ヘ}}$ である．

（ii） $g(x)$ は $x = \boxed{\text{ホ}}$ において極大値 $\boxed{\text{マ}}$，$x = \dfrac{\boxed{\text{ミ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{ム}}}}{2}$ において極小値 $\dfrac{\boxed{\text{メ}} \pm \boxed{\text{モ}}\sqrt{\boxed{\text{ヤ}}}}{2}$ をとる．ただし，複号同順である．

（iii）$y=g(x)$ において，極値をとるグラフ上の３点をP，Q，Rとする．これらの３点をすべて通り，軸が y 軸に平行な放物線の方程式は $y=-\boxed{ユ}x^2+\boxed{ヨ}x+\boxed{ラ}$ である．

4. 動物高校に通うウサギとクマの会話である．

ウサギ：従兄弟の子供が中学受験をするというので，問題集をやっていたんだ．

> １より大きな数（小学生だから正の整数）があります．次の操作 T を考えます．
>
> **操作 T**：「数が２の倍数のときは２で割り，２の倍数でないときは１を足す．」
>
> この操作 T を繰り返すと，いつか１になります．初めて１になったら，そこでやめます．
>
> たとえば最初が５ならば，１を足して６になり，２で割ると３になり，次は１を足して４になり，次は２で割って２になり，次は２で割って１になります．これを次のようにかくことにします．
>
> $5\to6\to3\to4\to2\to1$
>
> では，
>
> $\boxed{\text{III}}\to\boxed{\text{II}}\to\boxed{\text{I}}\to2\to1$
>
> となるとき，空欄にはどんな数が入るでしょうか？すべて答えなさい．

クマ：$\boxed{\text{I}}$ は４が入るね．T が「２で割るか，１を加える」だから，T の逆操作は「２倍するか，１を引く」で，$\boxed{\text{II}}$ は「$\boxed{\text{I}}$ の２倍，または $\boxed{\text{I}}$ から１を引いたもの」だから，「８または３」だね．

（１）$\boxed{\text{III}}$ に入ることができる数は $\boxed{リ}$ 個ある．

クマ：ちょうど n 回で操作が終了する数はいくつあるんだろう．

ウサギ：塾で「n 回で，場合の数の問題で，すぐに求められないなら，漸化式を立てる」と習った．やってみよう．うーん，これ，一般項に無理数が出るパターンだ．無理数が出ないように問題を変更しよう．

操作 U：「１より大きな正の整数があるとき，それが c の倍数ならば，c で割る．それが c の倍数でなければ，$1, 2, 3, \cdots, c-1$ のうちの１つの数を加えて c の倍数になるようにする．」

これを繰り返して初めて１になったらやめる．一番初めの数を N として，n 回の操作でやめるような N が a_n 個あるとする．$c=2$ なら最初の問題と同じになるから，$a_1=1, a_2=1, a_3=2$ になるってわけだ．

クマ：塾の先生は「後の方でタイプ分けする」か「最初でタイプ分けする」と言っていたね．最初でタイプ分けしてみよう．n 回で操作が終了する a_n 個の N のうち，

N が c の倍数のものは『１回目に c で割る』から，あと $n-1$ 回で終了するので，a_{n-1} 個あるね．

N が c の倍数でないものは，

『N が c で割って余りが $c-1$ なら，１回目に１を加えて c の倍数にして（これで１回の操作），次に c で割る（これが２回目の操作）』，

または『１回目に２を加えて c の倍数にして，次に c で割る』，…，

または『１回目に $c-1$ を加えて c の倍数にして，次に c で割る』，

というタイプがある．これらは，今の時点で２回操作しているから，あと $\boxed{ル}$ 回で終了するね．

ウサギ：だから $n\geqq3$ として $a_n=a_{n-1}+\boxed{レ}\times a_{\boxed{ロ}}$……Ⓐ が成り立つね．

（２）$\boxed{ル}$，$\boxed{レ}$，$\boxed{ロ}$ に次の選択肢から適当なものを選んで番号を答えよ．同じ番号を何回選んでもよい．

①　$n-1$　　②　$n-2$　　③　n　　④　$c-1$　　⑤　$c+1$　　⑥　c

（３）Ⓐ から得られる方程式 $x^2-x-\boxed{レ}=0$ が整数解をもつのは，０以上の整数 k を用いて $\boxed{ワ}c-\boxed{ヲ}=(2k+1)^2$ の形でかけるときである．このとき，$c=k^2+k+\boxed{ン}$ となる．特に，この $k=2$ のときは，$a_2=6$, $a_n=\dfrac{1}{\boxed{あ}}\left(\boxed{い}\cdot\boxed{う}^{n-1}-\boxed{え}\cdot\left(-\boxed{お}\right)^{n-1}\right)$ となる．

5. xyz 空間において，半径 1 の球 D の中心が xy 平面上の 4 つの線分

$$\begin{cases} y=0 \quad (-5 \leqq x \leqq 5) \\ x=0 \quad (-5 \leqq y \leqq 5) \\ y=x \quad (-5 \leqq x \leqq 5) \\ y=-x \quad (-5 \leqq x \leqq 5) \end{cases}$$

上を動くとする．このとき，球 D の通過する部分を W とおく．

（1） 平面 $z=t\,(-1 \leqq t \leqq 1)$ における，W の断面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t) = \boxed{\text{か}}\left\{10\left(\boxed{\text{き}}+\sqrt{\boxed{\text{く}}}\right)\sqrt{1-t^2}-\left(\boxed{\text{け}}+\boxed{\text{こ}}\sqrt{\boxed{\text{く}}}-\pi\right)(1-t^2)\right\}$$

である．

（2） W の体積を V とおくと，

$$V = \left(\frac{\boxed{\text{さし}}}{3}+20\sqrt{\boxed{\text{く}}}\right)\pi-\frac{\boxed{\text{すせ}}}{3}\left(\boxed{\text{そ}}+\sqrt{\boxed{\text{く}}}\right)$$

である．