※空欄に適切な解を入れよ．複数の解がある場合には「，（コンマ）」で区切ってすべての解を記入すること．

1. 数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$T_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$$

と定める．さらに，自然数 n に対して

$$T_n = n^2(3n - a_n + 3) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしているとき，以下の問いに答えよ．

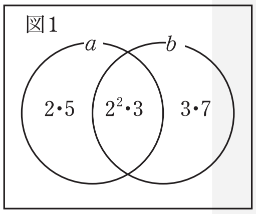
(1)　$a_1 =$ $\boxed{\text{ア}}$, $a_2 =$ $\boxed{\text{イ}}$ である．

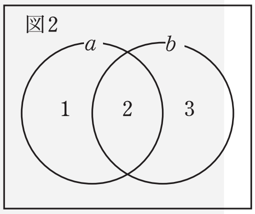
(2)　T_n, T_{n-1} の間に成り立つ関係式を用いて a_n を消去して考えると，$T_n =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3)　$a_n =$ $\boxed{\text{エ}}$ である．

2. 以下，a, b は自然数とし，a, b の最小公倍数を L，最大公約数を G とする．

たとえば，a, b を素因数分解し，$a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ のとき，a, b の最大公約数は $2^2 \cdot 3$ で，a, b は両方ともこれを公約数にもつ．これを図1の◯におき，それ以外に a がもつ $2 \cdot 5$ を☾におき，b がもつ $3 \cdot 7$ を☽におくと考える．すると，$a = (2 \cdot 5) \cdot (2^2 \cdot 3)$，$b = (2^2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 7)$ で，$L = (2 \cdot 5) \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 7)$ が成り立つ．$a = 2, b = 6$ のときは図2のように考え，☾には入るべき素因数がないから，そこには1を記入することにする．必要があれば，この考え方をヒントにして，次の問いに答えよ．





(1)　2310 を素因数分解すると $\boxed{\text{ア}}$ となる．次に，$L = 2310$ になるような a, b について (a, b) は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある．ただし，たとえば $(a, b) = (1, 2310)$ と $(a, b) = (2310, 1)$ は異なる組であると考える．この区別は以下の設問でも適用する．

(2)　x, y, z は0以上の整数で，

$x + y + z = 4$

を満たすとき，(x, y, z) は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある．ただし，たとえば $(x, y, z) = (4, 0, 0), (0, 0, 4)$ は異なる組である．

(3)　$L = 1680$ になるような a, b について (a, b) は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある．

3. θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ を動く実数であり，a は実数の定数である．

(1)　$x = -\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ とする．x のとる値の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である．また

$\sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta$ を x を用いて表すと $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2)　曲線 $y = x^2 + 2$ と直線 $y = a(2x - 1)$ が $x < 0$ で接するとき $a =$ $\boxed{\text{ウ}}$ であり，接点の x 座標は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3)　$f(\theta) = -\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + 2a(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta) + a + 4$

とする．方程式 $f(\theta) = 0$ の解の個数を N とする．$N \geqq 1$ になる a の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である．最大の N は $N =$ $\boxed{\text{カ}}$ であり，そのときの a の値の範囲は $\boxed{\text{キ}}$ である．

4. あるイベント会場に司会者の S さん，チーム a の A，B，C， チーム d の D，E，F の合計 7 人がいる．チーム a の 3 人とチーム d の 3 人は面識はない．A，B，C の各人は D，E，F の誰か一人を無作為に等確率で選ぶ．D，E，F の各人は A，B，C の誰か一人を無作為に等確率で選ぶ．お互いが指定した者同士がいれば，『新たな友達』になる．たとえば A さんが D さんを指定し，D さんが A さんを指定すれば A さんと D さんは『新たな友達』になる．ただし，誰が誰を指定したかは S さんの前にあるパネルに瞬時に表示され，S さんだけに分かるとする．S さんの発言は常に正しいとする．

(1)　『新たな友達』が 3 組できる確率は $\boxed{\text{ア}}$，『新たな友達』が 2 組できる確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2)　S さんが言った．

「A さん，ある人と『新たな友達』になりましたよ．」

このとき，B さんが誰かと『新たな友達』になる条件付き確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3)　S さんが言った．

「A さん，ある人と『新たな友達』になりましたよ．D さん，ある人と『新たな友達』になりましたよ．」

このとき，A さんと D さんが『新たな友達』である条件付き確率は $\boxed{\text{エ}}$ である．

5. 実数 p に対して，2 次方程式

$$x^2-(2p+1)x+2(p^2-p-1)=0$$

の異なる 2 つの実数解を $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$ とする．

(1)　解と係数の関係より，$\alpha+\beta, \alpha\beta$ を p を用いて表すと

$\alpha+\beta=\boxed{\text{ア}}, \alpha\beta=\boxed{\text{イ}}$

である．この 2 式から p を消去して得られる α, β に関する関係式を $\alpha\beta$ 平面に図示すると，中心の座標が $\boxed{\text{ウ}}$，半径が $\boxed{\text{エ}}$ の円となる．

以下では，p は $-\dfrac{1}{2}\leqq p\leqq 3$ の範囲を動くとする．

(2)　α のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である．また，β のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(3)　$2\alpha-\beta$ のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{キ}}$ である．