近畿大学・医学部

1. 関数

$$f(x)=\log_5(1-\cos 2x-3\cos x)$$

を考える．ただし，x の値は $0 \leqq x < 2\pi$ において $f(x)$ が定義されるもののみを考える．

（1） $t=\cos x$ とおく．$f(x)$ を t を用いて表すと

$$\log_5\left(\square t^2-\square t+\square\right)$$

である．

（2） $f(x)$ が定義される x のとりうる値の範囲は

$$\frac{\square}{\square}\pi < x < \frac{\square}{\square}\pi$$

である．

（3） $f(x)$ の最大値は

$$\square-\log_5\square$$

である．また，$f(x)$ が最大となるとき，$\cos x$ の値は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（4） $5^{f(x)}$ がとりうる最大の整数の値は $\square$ である．また，$5^{f(x)}$ が整数となる x の総数は $\square$ であり，$5^{f(x)}$ が整数となる x の総和は $\square\pi$ である．

（5） $20^{f(x)}$ がとりうる最大の整数の値は $\square$ である．また，$20^{f(x)}$ が整数となる x の総数は $\square$ であり，$2o^{f(x)}$ が整数となる x の総和は $\square\pi$ である．ただし，$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$, $\log_{10}7=0.8451$ とする．

2. $0<p<1$ とする．表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ である 1 枚の硬貨 A がある．

（1） $p=\dfrac{1}{3}$ とする．1 枚の硬貨 A を 3 回続けて投げるとき，表がちょうど 2 回出る確率は $\dfrac{\square}{\square}$ であり，少なくとも 1 回表が出る確率は $\dfrac{\square}{\square}$ である．

（2） n を 2 以上の自然数とする．1 枚の硬貨 A を n 回続けて投げる試行において，表が 2 回以上続けて出ない事象を X_n とする．

（i） X_n のうち，n 回目に表，n 回目に裏が出る場合の数を，それぞれ a_n, b_n とするとき

$a_2=\square$, $b_2=\square$,

$a_3=\square$, $b_3=\square$,

$a_4=\square$, $b_4=\square$

である．

（ii） $p=\dfrac{1}{2}$ とする．X_n の確率を $P(X_n)$ とするとき

$$P(X_5)=\frac{\square}{\square},\ P(X_{10})=\frac{\square}{\square}$$

である．

（3） 1 枚の硬貨 A を続けて投げる試行において，次の 2 つのことがわかっている．

- A を 5 回続けて投げる試行において，表がちょうど 3 回出る確率は，表が 3 回以上出てかつ表がちょうど 3 回続けて出る確率よりも大きい．
- A を 15 回続けて投げる試行において，表がちょうど k 回 $(0 \leqq k \leqq 15)$ 出る確率を比較すると，確率が最大となるのは $k=12$ のときのみである．

このとき，p のとりうる値の範囲は $\dfrac{\square}{\square} < p < \dfrac{\square}{\square}$ である．

3. 原点を O とする座標空間において，3 点 A$(4,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 4,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ 4)$ を考える．

（1） 線分 BC の中点と O の距離は $\square\sqrt{\square}$ である．また，△ABC の面積は $\square\sqrt{\square}$ である．

（2） O から平面 ABC に下ろした垂線の長さは $\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．

（3） 球面 $x^2+y^2+z^2=8$ と平面 ABC が交わってできる円を D とし，点 X$(p,\ q,\ r)$ が D 上を動くとする．

（i） D の半径は $\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．

（ii） $q+r,\ qr$ をそれぞれ p を用いて表すと

$q+r=\square-p,\ qr=\left(p-\square\right)^2$

である．

（iii） p のとりうる値の範囲は $\square \leqq p \leqq \dfrac{\square}{\square}$ である．

（iv） 3 点 P$(p,\ 0,\ 0)$, Q$(0,\ q,\ 0)$, R$(0,\ 0,\ r)$ を頂点とする △PQR の面積を S とする．S を p を用いて表すと

$S=\sqrt{\square p^3+\square p^2-\square p+\square}$

であり，S の最小値は $\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．