慶應義塾大学・医学部

1．（1） 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき，$0 \leqq Z \leqq u$ となる確率を $p(u)$ で表す．いくつかの u の値に対する $p(u)$ の値を以下の表にまとめた．

u	0.67	1.00	1.64	1.80	2.00	2.50
$p(u)$	0.2486	0.3413	0.4495	0.4641	0.4772	0.4938

この表を用いて，身長の分布について考察してみよう．

ある年の高校 3 年生女子の身長は，平均 158cm，標準偏差 5cm の正規分布に従うと仮定する．この年の高校 3 年生女子の中で，身長が 153cm 以上 170.5cm 以下の生徒は約 $\boxed{\text{ア}}$ % いる．この年の高校 3 年生女子の中で，身長が低い方から 2.5% の中に入る生徒の身長は $\boxed{\text{イ}}$ cm 以下である．ただし，$\boxed{\text{ア}}$ には小数第 1 位を四捨五入して，整数値を入れ，$\boxed{\text{イ}}$ には当てはまる最も大きい整数値を入れなさい．

（2） 連続型確率変数 X のとりうる値の範囲が $1 \leqq X \leqq e$ であり，その確率密度関数が $f(x) = rx\log x\ (1 \leqq x \leqq e)$ で与えられている．ただし，r は定数であり，e は自然対数の底である．このとき，$r = \boxed{}$ である．

（3） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^3\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \boxed{}$ である．

（4） i を虚数単位とし，方程式 $z^3 = 12(1+\sqrt{3}i)$ の異なる 3 つの解を α, β, γ とする．複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta), \mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を 3^s と表すと，$s = \boxed{}$ である．

（5） a, b, c, d を整数とし，$c \neq 0$ または $d \neq 0$ とする．$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，以下の 4 条件

$$a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ \frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} = 2\sqrt{2},\ ad+bc = 18$$

を満たす組 (a, b, c, d) をすべて求めなさい．

2．袋が 1 つ，赤玉 3 個，白玉 3 個が用意されている．赤玉が少なくとも 1 個袋に入った状態に対して，操作 T の手順を以下のように定める．

> 袋から玉を 1 個無作為に取り出し，それが赤玉であれば袋に戻し，白玉であれば袋に戻さない．

n を自然数とする．

（1） 赤玉 3 個と白玉 3 個が袋に入った状態から始めて，操作 T を n 回施し終えたとき，袋の中に入っている白玉の個数が 3 個である確率を a_n，2 個である確率を b_n，1 個である確率を c_n とする．このとき，次の関係式

$$a_{n+1} = \boxed{}\,a_n$$
$$b_{n+1} = \boxed{}\,a_n + \boxed{}\,b_n$$
$$c_{n+1} = \boxed{}\,b_n + \boxed{}\,c_n$$

が成り立つ．これより，a_n, b_n, c_n をそれぞれ n の式で表すと

$$a_n = \boxed{}$$
$$b_n = \boxed{}\left\{\left(\boxed{}\right)^n - \left(\boxed{}\right)^n\right\}$$
$$c_n = \boxed{}\left\{\left(\boxed{\text{ウ}}\right)^{n-1} + \boxed{}\left(\boxed{}\right)^{n-1} + \left(\boxed{\text{エ}}\right)^{n-1}\right\}$$

である．ただし，$\boxed{\text{ウ}} > \boxed{\text{エ}}$ とする．

（2） 赤玉が少なくとも 1 個袋に入った状態に対して，ゲーム T のルールを以下のように定める．

> 操作 T を 1 回施し，その結果，白玉が 3 個袋に入っている場合に限り 1 点を得る．

赤玉3個と白玉3個が袋に入った状態から始めて，ゲームTをn回行い終えたとき，1回目からn回目までに得た点の合計をX_nとし，$Y_n=2^{X_n}$と定める．このとき，Y_nの期待値は$\square$であり，分散は
$\square 2^{n-1}+\square n^2+\square n+\square$である．

3.（1）（i）3次式$P(x)=3x^3-9x^2+7x$と2次式$Q(x)=2x^2+1$について，合成関数$P(Q(x))$は多項式$\square$で表される．

（ii）多項式の積の展開より，2つの多項式$G(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$と$H(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$の合成関数$G(H(x))$は多項式で表される．$n$が自然数であって$b_n\neq 0$であるとき，$G(H(x))=0$が$x$についての恒等式ならば，$a_m=\cdots=a_0=0$となることを示しなさい．

（2）$f(x)$を0でない多項式とし，

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt,\ h(x)=\int_x^1 f(t)\,dt$$

と定める．さらに，$g(1)$をaと表し，以下の2条件が成り立つとする．

- ある定数b, c, dが存在して，xについての恒等式

$$g(h(x))-(\{h(x)\}^3+b\{g(x)\}^2+ch(x)+d)=0$$

が成り立つ．

- 等式$f(1)=2(1-a)$が成り立つ．

（i）$g(x)+h(x)=\square$であり，（1）（ii）を用いると，$g(x)$は$\square$次式であり，$b=\square$, $c=\square$, $d=\square$であることがわかる．

（ii）関数$g(x)$が極値をもつための必要十分条件は$a<\square$または$a>\square$である．aがこの条件を満たすとき，$g(x)$は$x=\boxed{オ}$で極大値Mをとる．また，方程式$g(x)=M$の解は$x=\boxed{オ}$と$x=\square$である．

（iii）曲線$y=g(x)$上の点$(a, g(a))$における接線の方程式は，$y=\boxed{カ}x+\boxed{キ}$である．さらに，

$$F(a)=\int_0^a\{g(x)-\boxed{カ}x-\boxed{キ}-2(x-a)\}e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}\,dx$$

と定める．ただし，eは自然対数の底である．このとき，$F(a)=\square$と表され，aの関数$F(a)$の最大値は$\square$である．

4.（1）座標平面において，連立不等式$0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 1$の表す正方形$S$を考える．正方形$S$の辺上の異なる5点

$\mathrm{P_0}(0, 0)$, $\mathrm{P_1}(p_1, 1)$, $\mathrm{P_2}(1, q_2)$, $\mathrm{P_3}(p, 0)$, $\mathrm{P_4}(p_4, q_4)$

は次の条件を満たすとする．$i=1, 2, 3$に対して，点P_iは正方形Sの頂点でなく，点P_iを通る正方形Sの辺を線分$\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i$と表すとき，$\angle \mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i\mathrm{A}_i=\angle \mathrm{P}_{i+1}\mathrm{P}_i\mathrm{B}_i$が成り立つ．ただし，$0^\circ<\angle \mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i\mathrm{A}_i<90^\circ$とする．このとき，$p_1=\square$, $q_2=\square$である．さらに，$0<p\leqq\boxed{ク}$のとき$(p_4, q_4)=(0, \square)$であり，$\boxed{ク}\leqq p<1$のとき$(p_4, q_4)=(\square, 1)$である．

（2）座標空間において，連立不等式$0\leqq x\leqq 1, 0\leqq y\leqq 1, 0\leqq z\leqq 1$の表す立方体$T$を考える．立方体$T$の面上の異なる5点

$\mathrm{Q_0}(0, 0, 0)$, $\mathrm{Q_1}(a_1, b_1, 1)$, $\mathrm{Q_2}(a_2, 1, c_2)$, $\mathrm{Q_3}(a, b, 0)$, $\mathrm{Q_4}(a_4, b_4, c_4)$

は次の条件を満たすとする．$i=1, 2, 3$に対して，点Q_iは立方体Tの頂点でなく，Tの辺上にもない．さらに，点Q_iを含む立方体Tの面は，3点$\mathrm{Q}_{i-1}, \mathrm{Q}_i, \mathrm{Q}_{i+1}$の定める平面と直交し，この2つの面が共有する線分を$\mathrm{C}_i\mathrm{D}_i$と表すとき，$\angle \mathrm{Q}_{i-1}\mathrm{Q}_i\mathrm{C}_i=\angle \mathrm{Q}_{i+1}\mathrm{Q}_i\mathrm{D}_i$が成り立つ．ただし，$0^\circ<\angle \mathrm{Q}_{i-1}\mathrm{Q}_i\mathrm{C}_i<90^\circ$とする．

（i）2点$(0, 0, 0)$, $(a_1, b_1, 0)$を通る直線と平面$y=1$の交点の座標はa_1, b_1を用いて$(\boxed{ケ}, 1, 0)$と表されるので，$a_2=\boxed{ケ}$である．

（ii）a, bを用いて$a_1=\square$, $b_1=\square$, $a_2=\square$, $c_2=\square$と表される．さらに，$a_4=1, b_4=0$となるための必要十分条件は，$\boxed{コ}\leqq a<1$かつ$b=\square$となることであって，この条件が成り立つならば，

$c_4 = \square$ である．また，$0 < a \leqq \boxed{\text{コ}}$ かつ $\boxed{\text{コ}} \leqq b < 1$ であるとき，$(a_4,\ b_4,\ c_4) = (\square,\ \square,\ 1)$ である．