川崎医科大学

1．座標平面上に 2 つの直線 $l : y = 2x + 4,\ m : y = -2x + 12$ がある．2 直線 l, m の交点を A とし，直線 m と x 軸の交点を B とする．線分 AB を直径とする円を K とし，直線 l と円 K の共有点で A でない方を C とする．また，D(2, 0) とする．

（1） 点 A の座標は $(\square, \square)$ であり，円 K の中心の座標は $(\square, \square)$，半径は $\square\sqrt{\square}$ である．また，点 C の座標は $\left(-\dfrac{\square}{\square}, \dfrac{\square}{\square}\right)$ である．

（2） $\angle \mathrm{ADC} = \alpha,\ \angle \mathrm{BCD} = \beta$ とするとき，$\tan\alpha = \dfrac{\square}{\square}$ であり，$\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．

（3） a を定数とし，円 K の点 D を含む弧 BC と線分 AB および線分 AC で囲まれた領域を L とする．点 (x, y) が領域 L を動くとき，$ax - y$ の最大値 M は，

$$a < -\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} \text{ のとき}, M = \frac{\square}{\square}\left(a + \square\right)$$

$$-\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} \leqq a < \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}} \text{ のとき}, M = \square a - \square + \square\sqrt{\square\left(a^2 + \square\right)}$$

$$\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}} \leqq a \text{ のとき}, M = \square a$$

である．

また，a の値が変化するとき，M が最小値をとるのは，$a = \square$ のときである．

2．a は $0 < a \leqq 1$ を満たす定数とし，関数 $f(x) = \log(x + a)$ がある．

（1） $a = 1$ とする．$y = f(x)$ のグラフを C_1 とし，C_1 上の点 $(1, f(1))$ における法線を l とする．

（i） $f'(1) = \dfrac{\square}{\square}$ であり，法線 l の方程式は，$y = \square x + \boxed{ア} + \log\boxed{イ}$ である．また，C_1 と l および y 軸で囲まれた図形の面積は，$\square - \log\square$ である．

（ii） p, q を定数とし，q は $\log 2 < q < \boxed{ア} + \log\boxed{イ}$ を満たすとする．$y = p\log(x + 1) + q$ のグラフを C_2 とし，C_2 が点 $(1, \log 2)$ を通るとき，$q = \left(\square - p\right)\log\square$ である．このとき，$x \geqq 0$ の部分で C_2 と l および y 軸で囲まれた図形の面積が $\dfrac{\log 2 + 1}{2}$ であれば，$p = \dfrac{\square}{\square}$ である．

（2） $g(a) = \displaystyle\int_0^1 \left|f(x)\right| dx$ とする．

$$g(a) = \left(a + \square\right)\log\left(a + \square\right) + a\log a - \square a + \square$$

である．また，$g'(a) = 0$ の解は，$a = \dfrac{\sqrt{\square} - \square}{\square}$ であり，a の値が変化するとき，$g(a)$ の最小値は

$$\log\frac{\sqrt{\square} + \square}{\square} + \square - \sqrt{\square}$$

である．

3．i を虚数単位とし，2 つの複素数 $\alpha = 2 + 4i,\ \beta = 1 - 3i$ がある．

（1） $|\alpha| = \square\sqrt{\square}$，$\dfrac{\alpha}{\beta} = \square + i$ であり，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表すと，$\dfrac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\square}\left(\cos\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi + \sin\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\pi\right)$ となる．ただし，$0 \leqq \arg\dfrac{\alpha}{\beta} < 2\pi$ とする．また，$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{20} = \square$ である．

（2） 複素数 z は，方程式 $\left|z - \beta\right| = \sqrt{2}$ を満たしている．このとき，$\left|z - \alpha\right|$ の最大値は $\square\sqrt{\square}$ であり，

そのときの z は $\dfrac{\square - \square i}{\square}$ である．

（3） 複素数平面上で，複素数 α, β が表す点をそれぞれ A，B とする．$\gamma = \dfrac{\square - i}{\square}$ とするとき，直線 AB 上の点を表す複素数 z は，つねに方程式 $\overline{\gamma}z + \gamma\overline{z} = 1$ を満たす．このとき，$zw = 10$ を満たす複素数 w が表す点は，点 $\dfrac{\square + i}{\square}$ を中心とし，半径が $\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ の円周上にある．また，複素数 z, w が表す点をそれぞれ P，Q とし，P，Q は実軸上にないとする．$\triangle$POQ の面積が最大となるとき，直線 AB は $\triangle$POQ の面積を $\boxed{ウ}$: $\boxed{エ}$ の比に分ける．ただし，O は原点とし，$\boxed{ウ} < \boxed{エ}$ とする．