関西医科大学

1. 以下の設問に答えよ．

（1） a は 0 でない定数とする．座標平面上に原点 O と点 A$(2, 0)$ をとり，線分 OA を直径とする円を C とする．また原点 O を焦点，直線 $x = \dfrac{a}{2}$ を準線とする放物線を D とする．C と D をそれぞれ極方程式で表せ．

（2） k を定数とし，$0 < x < 2\pi$ の範囲において，2 つの関数 $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = \dfrac{k}{2(1-\cos x)}$ を定める．$y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの共有点の個数を求めよ．

2. m と n を $m < n$ を満たす自然数とする．以下の設問に答えよ．

（1） $2024 = n^2 - m^2$ を満たす m, n の組は何通りあるか求めよ．

（2） $2025 = n^2 - m^2$ を満たす m, n の組は何通りあるか求めよ．

（3） 2025 を m から n までの連続する自然数の和で表すことができる m, n の組は何通りあるか求めよ．

3. n を自然数とし，m を 3 以上の整数とする．$1, 2, \cdots, m$ の m 個の数字の中から一つの数字を無作為に表示するルーレットがあり，このルーレットに表示される数字を用いてゲームの勝敗を次のように決める．

（i） 表示された数字が 1 であれば勝ちとしてゲームを終了する．

（ii） 表示された数字が，1 回前に表示された数字と同じであれば負けとしてゲームを終了する．（注意：1 回目に負けることはない）

（iii） ゲームの勝敗が決まらなかった場合は引き分けとし，再度ルーレットをまわして新たな数字を表示させる．

ちょうど n 回目に表示された数字によって，ゲームに勝つ確率を a_n，ゲームに負ける確率を b_n，引き分けとなる確率を c_n とする．以下の設問に答えよ．

（1） $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k - b_k)$ を m を用いて表せ．

（2） $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$ を c_n を用いて表せ．

（3） c_n を m を用いて表せ．

（4） $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k}$ を m を用いて表せ．

4. xyz 空間において，$x^2 + y^2 \leqq 1$ かつ $0 \leqq z \leqq 4x^3 - 3x + 1$ を満たす領域を S とする．この領域 S のうち $\dfrac{1}{2} \leqq x$ を満たす部分を T，$x \leqq \dfrac{1}{2}$ を満たす部分を U とする．また，T の体積を V とする．以下の設問に答えよ．

（1） $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ を用いて表せ．（答えだけで良い）

（2） V を求めよ．

（3） U の体積を V を用いて表せ．

（4） T を，z 軸の周りに反時計回りに 120° 回転させた立体のうち，S に含まれる部分の体積を V を用いて表せ．