兵庫医科大学

1. 次の（1）から（5）までの各問いに答えよ．なお，途中の式や考え方等も記入すること．

（1） 不等式 $\log_4|x-1|+2>\log_2 x$ を解け．

（2） 関数 $y=e^{ax}\sin bx$ は方程式 $y''-2y'+5y=0$ を満たす．実数の定数 a, b の値を求めよ．

（3） 以下のそれぞれの場合，x, y, z の整数解の組の総数を求めよ．

（i） 方程式 $x+y+z=20$ を満たす 0 以上の整数 x, y, z の組

（ii） 方程式 $x+y+z=20$ を満たす 1 以上の整数 x, y, z の組

（4） $0 \leqq x<\pi,\ 0 \leqq y<\pi,\ x-y=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\sin^2 x+\cos^2 y$ の最大値，最小値とそのときの x の値を求めよ．

（5） 正方形 ABCD があり，辺 AB を斜辺にもつ直角三角形 ABF が正方形の外側にある．正方形の対角線の交点を E，$\mathrm{AF}=6,\ \mathrm{BF}=8$ のとき，線分 EF の長さを求めよ．

2. 濃度 a% の食塩水 200g が入っている容器 A と，濃度 b% の食塩水 300g が入っている容器 B がある．A より 100g の食塩水をとってそれを B に移し，よくかき混ぜた後に同量を A に戻すとする．この操作を n 回繰り返したときの A と B の食塩水の濃度を求めたい．以下の問いに答えよ．なお，途中の式や考え方等も記入すること．

（1） 容器 A と容器 B に最初にあった食塩の量の和を求めよ．

（2） $n(\geqq 1)$ 回の操作の後，容器 A の濃度が x_n%，容器 B の濃度が y_n% になっていたとする．x_n および y_n を，それぞれ，x_{n-1} と y_{n-1} を用いて表したい．以下の $\square$ に適当な数を入れよ．

$$\begin{cases} x_n=\square\, x_{n-1}+\square\, y_{n-1} \\ y_n=\square\, x_{n-1}+\square\, y_{n-1} \end{cases}$$

（3） この操作を何回繰り返した後でも，容器 A と容器 B の食塩の量の和は一定であることを，（2）の漸化式を使って示せ．

（4） x_n および y_n を，それぞれ a, b, n を用いて表せ．

（5） 上記の操作を限りなく繰り返したとき，容器 A と容器 B の食塩水の濃度は，どのような値に近づくか，それぞれ求めよ．

3. 複素数平面において，原点 O(0) と $\mathrm{A}(\alpha), \mathrm{B}(\beta)$ は相異なる点であるとする．また，複素数 z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表すとき，以下の問いに答えよ．なお，途中の式や考え方等も記入すること．

（1） 3 点 O，A，B が同一直線上にあるための条件を α と β および $\overline{\alpha}$ と $\overline{\beta}$ を用いて表せ．

（2） 3 点 O，A，B が同一直線上にないとき，△OAB の外心 C を表す複素数 γ を α と β および $\overline{\alpha}$ と $\overline{\beta}$ を用いて表せ．

（3） $\alpha=1,\ \beta=\sqrt{3}+3i$ であるとする．このとき，

（i） 半直線 CA から半直線 CB までの回転角 θ を求めよ．ただし，$-\pi<\theta \leqq \pi$ とする．

（ii） さらに，$\omega=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ z_n=(\alpha-\gamma)\omega^n+\gamma$ とする．整数 n が動くとき，z_n が β に最も近い n を求めよ．