※空欄に適切な解を入れよ．複数の解がある場合には「,（コンマ）」で区切ってすべての解を記入すること．

1. 数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$T_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$$

と定める．さらに，自然数 n に対して

$$T_n = n^2(3n - a_n + 3) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしているとき，以下の問いに答えよ．

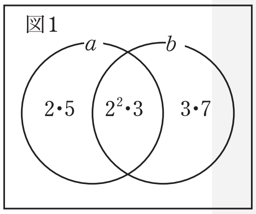
(1)　$a_1 = \boxed{\text{ア}}$, $a_2 = \boxed{\text{イ}}$ である．

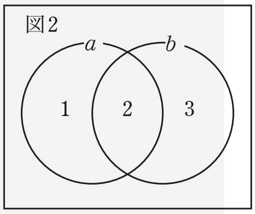
(2)　T_n, T_{n-1} の間に成り立つ関係式を用いて a_n を消去して考えると，$T_n = \boxed{\text{ウ}}$ である．

(3)　$a_n = \boxed{\text{エ}}$ である．

2. 以下，a, b は自然数とし，a, b の最小公倍数を L，最大公約数を G とする．

たとえば，a, b を素因数分解し，$a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ のとき，a, b の最大公約数は $2^2 \cdot 3$ で，a, b は両方ともこれを公約数にもつ．これを図 1 の ◯ におき，それ以外に a がもつ $2 \cdot 5$ を ☾ におき，b がもつ $3 \cdot 7$ を ☽ におくと考える．すると，$a = (2 \cdot 5) \cdot (2^2 \cdot 3)$，$b = (2^2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 7)$ で，$L = (2 \cdot 5) \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 7)$ が成り立つ．$a = 2, b = 6$ のときは図 2 のように考え，☾ には入るべき素因数がないから，そこには 1 を記入することにする．必要があれば，この考え方をヒントにして，次の問いに答えよ．





(1)　2310 を素因数分解すると $\boxed{\text{ア}}$ となる．次に，$L = 2310$ になるような a, b について (a, b) は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある．ただし，たとえば $(a, b) = (1, 2310)$ と $(a, b) = (2310, 1)$ は異なる組であると考える．この区別は以下の設問でも適用する．

(2)　x, y, z は 0 以上の整数で，

$x + y + z = 4$

を満たすとき，(x, y, z) は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある．ただし，たとえば $(x, y, z) = (4, 0, 0), (0, 0, 4)$ は異なる組である．

(3)　$L = 1680$ になるような a, b について (a, b) は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある．

3. θ は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ を動く実数であり，a は実数の定数である．

(1)　$x = -\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ とする．x のとる値の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である．また

$\sqrt{3}\sin 2\theta + \cos 2\theta$ を x を用いて表すと $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2)　曲線 $y = x^2 + 2$ と直線 $y = a(2x - 1)$ が $x < 0$ で接するとき $a = \boxed{\text{ウ}}$ であり，接点の x 座標は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(3)　$f(\theta) = -\cos 2\theta - \sqrt{3}\sin 2\theta + 2a(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta) + a + 4$

とする．方程式 $f(\theta) = 0$ の解の個数を N とする．$N \geqq 1$ になる a の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である．最大の N は $N = \boxed{\text{カ}}$ であり，そのときの a の値の範囲は $\boxed{\text{キ}}$ である．

4. あるイベント会場に司会者の S さん，チーム a の A，B，C， チーム d の D，E，F の合計 7 人がいる．チーム a の 3 人とチーム d の 3 人は面識はない．A，B，C の各人は D，E，F の誰か一人を無作為に等確率で選ぶ．D，E，F の各人は A，B，C の誰か一人を無作為に等確率で選ぶ．お互いが指定した者同士がいれば，『新たな友達』になる．たとえば A さんが D さんを指定し，D さんが A さんを指定すれば A さんと D さんは『新たな友達』になる．ただし，誰が誰を指定したかは S さんの前にあるパネルに瞬時に表示され，S さんだけに分かるとする．S さんの発言は常に正しいとする．

(1) 『新たな友達』が 3 組できる確率は $\boxed{\text{ア}}$ ，『新たな友達』が 2 組できる確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) S さんが言った．

「A さん，ある人と『新たな友達』になりましたよ．」

このとき，B さんが誰かと『新たな友達』になる条件付き確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) S さんが言った．

「A さん，ある人と『新たな友達』になりましたよ．D さん，ある人と『新たな友達』になりましたよ．」

このとき，A さんと D さんが『新たな友達』である条件付き確率は $\boxed{\text{エ}}$ である．

5. 実数 p に対して，2 次方程式

$$x^2-(2p+1)x+2(p^2-p-1)=0$$

の異なる 2 つの実数解を $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$ とする．

(1) 解と係数の関係より，$\alpha+\beta, \alpha\beta$ を p を用いて表すと

$\alpha+\beta=\boxed{\text{ア}}, \alpha\beta=\boxed{\text{イ}}$

である．この 2 式から p を消去して得られる α, β に関する関係式を $\alpha\beta$ 平面に図示すると，中心の座標が $\boxed{\text{ウ}}$ ，半径が $\boxed{\text{エ}}$ の円となる．

以下では，p は $-\dfrac{1}{2}\leqq p\leqq 3$ の範囲を動くとする．

(2) α のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である．また，β のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(3) $2\alpha-\beta$ のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{キ}}$ である．

1

(1) $T_1 = a_1$ だから

$a_1 = 3 - a_1 + 3$ 　　$\therefore a_1 = 3 \cdots\cdots$(ア)

$T_2 = a_1 + 2a_2 = 3 + 2a_2$

$3 + 2a_2 = 4(6 - a_2 + 3)$ 　$\therefore a_2 = \dfrac{11}{2} \cdots\cdots$(イ)

(2) $n \geqq 2$ のとき

$na_n = T_n - T_{n-1}$ を $T_n = 3n^3 - n \cdot na_n + 3n^2$

に代入して

$$T_n = 3n^2 - n(T_n - T_{n-1}) + 3n^2$$

$$(n+1)T_n - nT_{n-1} = 3n^2(n+1)$$

$$nT_{n-1} - (n-1)T_{n-2} = 3(n-1)^2 n$$

$$\vdots$$

$$+)\ 3T_2 - 2T_1 = 3 \cdot 2^2 \cdot 3$$

$$(n+1)T_n - 2T_1 = 3\sum_{k=2}^{n} k^2(k+1)$$

$$(n+1)T_n = 6 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1) - 6$$

$$(n+1)T_n = 3 \cdot \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + 3 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

$\therefore T_n = \dfrac{1}{4}n(n+2)(3n+1) \cdots$(ウ)

($n=1$ のときもみたす)

(4) $na_n = T_n - T_{n-1}$

$$= \frac{1}{4}\{n(n+2)(3n+1) - (n-1)(n+1)(3n-2)\}$$

$$= \frac{1}{4}(9n^2+5n-2)$$

$$\therefore a_n = \frac{9n^2+5n-2}{4n} \quad \cdots\cdots (\mathrm{I})$$

$\boxed{2}$

(1) $2310 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$ ---(ア)

図1で $2\cdot5$, $2^2\cdot3$, $3\cdot7$ が入っている部分を

左側, 中側, 右側と呼ぶことにする.

2, 3, 5, 7, 11を左側, 中側, 右側のどこにおくかで

$3^5 = 243$通り ----(イ)

(2) 異なる3種類のものから重複を許して4個選ぶ

重複組み合わせの個数だから

${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$通り ---(ウ)

(3) $1680 = 2^4\cdot3\cdot5\cdot7$

4個の2を左側, 中側, 右側にx, y, z個

おくとすると, (2)から15通り

このうち $(x, y, z) = (3, 0, 1), (2, 0, 2), (2, 1, 1), (1, 0, 3)$

$(1, 1, 2), (1, 2, 1)$ の6通りは不適だから

$15 - 6 = 9$通り

3, 5, 7を左側, 中側, 右側のどこかにおくと考えて

3^3通り

∴ $9 \times 3^3 = 243$通り ....(エ)

$\boxed{3}$

(1) $x=2\sin\left(\theta+\frac{5}{6}\pi\right)$ で $0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\frac{5}{6}\pi\leqq\theta+\frac{5}{6}\pi\leqq\frac{11}{6}\pi$

∴ $-2\leqq x\leqq 1$ ……(ア)

$x^2=3\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$

$=1+(1-\cos 2\theta)-\sqrt{3}\sin 2\theta$

$=2-\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta$

∴ $\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta=2-x^2$ ……(イ)

(2) $x^2+2=a(2x-1)$

$x^2-2ax+a+2=0$

判別式Dとすると $x<0$ に重解を持つので

$D=0$, $2a<0$, $a+2>0$

$\Longleftrightarrow (a-2)(a+1)=0$, $-2<a<0$

∴ $a=-1$ ……(ウ)

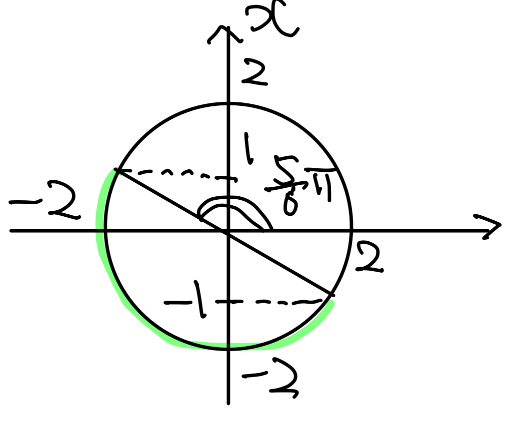
このときの重解が接点のx座標だから

$x=a=-1$ ……(エ)

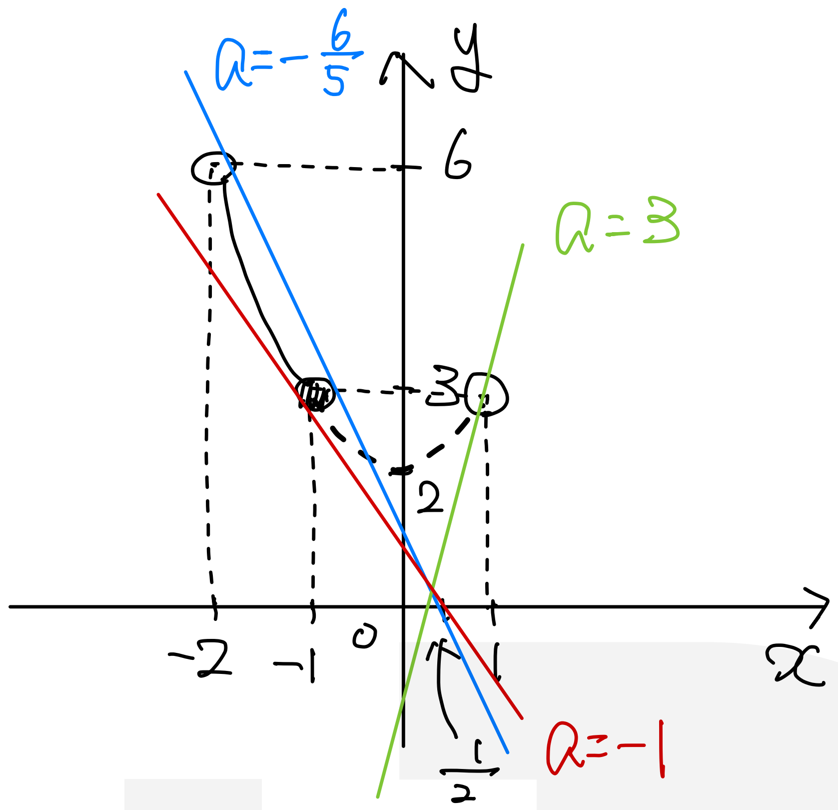
(3) $f(\theta)=x^2-2-2ax+a+4$

$=x^2+2-a(2x-1)$

$f(\theta)=0$ のとき $x^2+2=a(2x-1)$



$x=-2$ に対し θ は1個
$-2<x\leqq-1$ の x 1つに対し θ は2個
$-1<x\leqq 1$ の 〃 1個
が対応する



破線，白丸は1つ
実線，黒丸は2つ
に対応

グラフより

$N \geqq 1$ のとき　$a \leqq -1,\ 3 \leqq a$ ……(オ)

最大のNは　$N=3$ ……(カ)

このとき　$-\frac{6}{5} < a < -1$ ……(キ)

4

(1) 6人が誰を指名するかは

全部で 3^6 通り.

「新たな友達」が3組できるとき

A.B.C と D.E.F のペアの作り方は

$3! = 6$ 通り

よって「新たな友達」が3組できる

確率は $\frac{6}{3^6} = \frac{2}{243}$ ア

「新たな友達」が2組できるとき.

4-a のどの2人が「新たな友達」を

作れたかで ${}_3C_2 = 3$ 通り.

この2人が 4-d の誰と友達になったか

で ${}_3P_2 = 6$ 通り.

「新たな友達」になれなかった2人は

お互いを指名していないから

$1-\left(\frac{1}{3}\right)^2$

よって「新たな友達」が2組できる

確率は $\frac{3\times6}{3^4}\times\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{16}{81}$ イ

(2) Bが誰かと「新たな友達」になるのは、
Aと友達になる人以外を指名し、
その指名された人がBを指名したとき
だから $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ ウ

(3)「新たな友達」を「$\longleftrightarrow$」で表すとする。
A、Dが誰かと「新たな友達」になるのは

① $A \longleftrightarrow D$ (B.C.E.Fは任意)
② $A \longleftrightarrow E$ かつ $B \longleftrightarrow D$ (C.Fは任意)
③ $A \longleftrightarrow E$ かつ $C \longleftrightarrow D$ (B.Fは任意)
④ $A \longleftrightarrow F$ かつ $B \longleftrightarrow D$ (C.Eは任意)
⑤ $A \longleftrightarrow F$ かつ $C \longleftrightarrow D$ (B.Eは任意)

のときで全てとなる
①の確率は $\frac{1}{9}$、②〜⑤の確率は $\frac{1}{81}$ なので
A、Dが誰かと「新たな友達」となる事象をX
AとDが「新たな友達」となる事象をYとおくと

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{81} \times 4} = \frac{9}{13}$$ エ

$\boxed{5}$

(1) 解と係数の関係より

$\alpha+\beta = \underline{2p+1}$ ア $\cdots$ ①

$\alpha\beta = \underline{2(p^2-p-1)}$ イ $\cdots$ ② である

① より $p = \dfrac{\alpha+\beta-1}{2}$ を ② に代入して

$$\alpha\beta = 2\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right) - 2$$

整理して $(\alpha-2)^2+(\beta-2)^2=9 \cdots$ ②

よって中心 $\underline{(2, 2)}$ ウ 半径 $\underline{3}$ エ の円

(2) $-\dfrac{1}{2} \leqq p \leqq 3$ より

$$-\frac{1}{2} \leqq \frac{\alpha+\beta-1}{2} \leqq 3$$

$0 \leqq \alpha+\beta \leqq 7 \cdots$ ③ である。

$\alpha<\beta$ であることに注意すると、

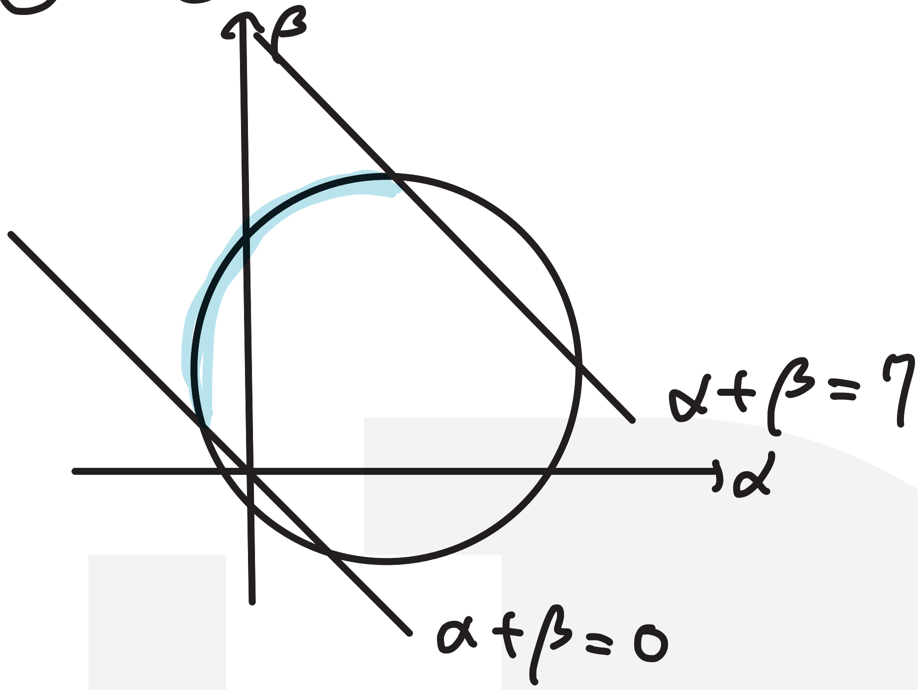
$\alpha+\beta=0$ と ② の交点が

$(\alpha, \beta) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\alpha+\beta=7$ と ② の交点が

$(\alpha, \beta) = (2, 5)$ であることから

②と③をみたすのは下図の青色部



よって上図より $-1 \leqq \alpha \leqq 2$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \beta \leqq 5$

オ　カ

(3) $2\alpha-\beta=k$ とおくと．$2\alpha-\beta$ が k という値をとることは(2)の青色部と $2\alpha-\beta=k$ が共有点をもつことと等しい。

$2\alpha-\beta-k=0$ の傾きが2であることから青色部と接するときに最小値をとり，

$(\alpha, \beta)=(2, 5)$ のとき最大値をとる．

最小値をとるとき.

$$\frac{|2\times 2-2-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=3$$

$$|2-k|=3\sqrt{5}$$

$k=2\pm 3\sqrt{5}$ となり図より $k=2-3\sqrt{5}$

最大値をとるとき.

$k=2\times 2-5=-1$ だから

$$\underline{2-3\sqrt{5}\leqq 2\alpha-\beta\leqq -1}$$ キ

講評

【1】標準
（1）は平易
（2）のa_nを消去するところで手間取った受験生がいるかもしれない。
（3）は公式丸暗記の人は, ずれた可能性がある。具体的に書いて足して求めたい。
【2】やや易
（1）（2）は平易
（3）で前の設問の利用がきちんとできると完答できる。
【3】標準
よくある変形対称型の式と個数の対応の問題だが, （オ）（キ）でグラフをきれいに書かないと辛いことになったかもしれない。時間内に完答は非常に難しい。
【4】やや難
問題の設定自体は難しくないが短い時間でしっかりと状況を把握し, 完答をすることはやや難しいと思われる。
【5】やや難
（1）は平易
（2）は式だけで求めようとすると苦労するが, 領域と絡めて考えると求めやすい。
（3）は（2）の出来次第だろう。

今年は昨年度までのような会話文はなかったものの文章量が多く, 時間内に解き切ることは難しいだろう。平易な問題と難しい問題が混在しているので, どの問題を解いたかにより差がついたと思われる。
全体として問題自体は決して難しくないが, 試験時間を考えると合格ラインは50%程度だろう。